20.04.2013

Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele

Klausur

Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2012/2013

Beachten Sie bitte, dass außer Ihrem handbeschriebenen Blatt keine weiteren Hilfsmittel erlaubt sind! Sie müssen die Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten Papier bearbeiten. Falls Ihnen das Papier dabei ausgehen sollte, so können Sie sich jederzeit weiteres Papier geben lassen. Legen Sie bitte während der Klausur Ihren Studentenausweis gut sichtbar neben sich auf den Tisch. Bitte markieren Sie die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Falls Sie als Linkshänder Ihre Blätter am anderen Rand getackert haben wollen, dann melden Sie sich bitte.

Hinweis zu den Aufgaben 1-3. Hier müssen Sie in die Felder W oder F eintragen. Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt und für jede falsche Antwort einen halben Punkt Abzug. Sie können das Feld auch leer lassen. In diesem Fall gibt es keinen Punkt aber auch keinen Abzug. Die Punktzahl ist nach unten pro Aufgabe durch Null beschränkt.

Dauer der Klausur: 9:15 bis 11:30 Uhr

Nachname: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Studienfach: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	3	6	6	5	7	10	8
erhaltene Punkte							

Aufgabe	8	9	10	11	12	13
max. Punkte	5	8	3	6	8	5
erhaltene Punkte						

Σ (max. 80)	Note	

Viel Erfolg !!!

Name

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Welche der folgenden Aussagen ist wahr (W) und welche falsch (F)?

____ Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

____ Die Menge $A := \{ k \in \mathbb{N} \,|\, \text{es gibt ein } l \in \mathbb{N} \text{ mit } k = 3l \}$ enthält keine ungeraden Zahlen.

____ Die Menge $M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leq 1, \ |y| \leq 1 \}$ stellt ein Quadrat der Kantenlänge zwei dar.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Welche der folgenden Aussagen ist wahr (W) und welche falsch (F)?

____ Ist p ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p so ist stets $\overline{z} \in \mathbb{C}$ auch eine Nullstelle von p.

____ Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen entspricht geometrisch einer Drehstreckung.

____ Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$.

____ Sind p und q jeweils Polynome vom Grad n so gilt stets $p \circ q = q \circ p$.

____ Für beliebige komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

____ Sei $z = r_1 e^{i\varphi_1}$, $w = r_2 e^{i\varphi_2}$ mit $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ und $z^2 = w$. Dann gilt $r_1 = \sqrt{r_2}$ und $\varphi_1 = \frac{\varphi_2}{2}$.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Welche der folgenden Aussagen ist wahr (W) und welche falsch (F)?

____ Für die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

____ Sind $n, \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen mit $k \leq n$ so gilt stets $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{k} + \binom{n}{k}$.

____ Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige gerade Funktion und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige ungerade Funktion, so gilt $\int\limits_{-a}^{a} f(x)g(x)\,dx = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

____ Es gilt: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k = 2$.

____ Ist F eine Stammfunktion von f und G eine Stammfunktion von g, so ist FG eine Stammfunktion von fg.

____ Die Folge $a_n = \frac{1}{n} \sin(n)$ divergiert für $n \to \infty$, da die Sinusfunktion oszilliert.

Name

Aufgabe 4: **1+1+3 Punkte**

Die Funktion $f : [-3, -1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = (x + 2)^2 - 1$.

1. Zeigen Sie, dass f injektiv ist oder finden Sie ein Gegenbeispiel dazu.
2. Zeigen Sie, dass f surjektiv ist oder finden Sie ein Gegenbeispiel dazu.
3. Geben Sie Intervalle $D, B \subset \mathbb{R}$ an, so dass $f : D \to B$ bijektiv ist und geben Sie die Umkehrfunktion an.

Tipp: Fertigen Sie eine Skizze an.

Name

Aufgabe 5: **2+3+2 Punkte**

1. Sei $z = 2 + 3i$. Geben Sie z^{-1} in der Form $z^{-1} = a + ib$ an.
2. Die Punkte $P_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $P_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ und $P_3 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ bilden ein Dreieck im $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks.
3. Finden Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = -i$. **Tipp:** Tragen Sie $-i$ in ein Koordinatensystem ein und überlegen Sie, was die Aussage anschaulich bedeutet.

Name

Aufgabe 6: **2+3+3+2 Punkte**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{3x-6}{x+2}$.

1. Geben Sie den Definitionsbereich sowie die Nullstellen von f an.
2. Geben Sie die Polstellen von f und das asymptotische Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$ an.
3. Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f. Ist f monoton auf $\mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

Name

Aufgabe 7: **2+2+2+2 Punkte**

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz für $n \to \infty$ und begründen Sie Ihre Aussage. Geben Sie außerdem den Grenzwert an, falls er existiert.

1. $a_n = (-1)^n + (-1)^n$, $n \geq 0$.
2. $b_n = \dfrac{(-1)^{n^2}}{n^2}$, $n \geq 1$
3. $c_n = \begin{cases} \cos(\frac{n\pi}{2}) \text{ falls } 1 \leq n \leq 100, \\ 17 \text{ falls } n \geq 101 \end{cases}$
4. $d_n = \dfrac{1-n}{1-n^2}$, $n \geq 0$.

Name

Aufgabe 8: **2+3 Punkte**

Eine Basketballmannschaft besteht aus 9 Spielerinnen.

1. Wieviele Möglichkeiten hat die Trainerin, 5 Startspielerinnen auszuwählen?
2. Nach der Halbzeitpause sollen 3 der Startspielerinnen und 2 der Spielerinnen, die bisher noch nicht gespielt haben, aufs Feld. Wieviele solcher Kombinationen sind möglich?

Rechnen Sie Ihre Ergebnisse jeweils aus!

Name

Aufgabe 9: **2+2+2+2 Punkte**

Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen.
Geben Sie dabei alle verwendeten Ableitungsregeln an!

1. $f(x) = x^k x^l$, $k, l \in \mathbb{N}$.
2. $g(x) = (\sin x + 3x)^5$.
3. $h(x) = \cot x := \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $x \in (0, \pi)$.
4. $u(x) = \ln(\cos(x^2) + 2)$.

Name

Aufgabe 10: **3 Punkte**

Eine Parabel habe bei $x_0 = -3$ eine Nullstelle und ein absolutes Minimum in $(0, -2)$. Geben Sie die Gleichung dieser Parabel an.

Name

Aufgabe 11: **2+4 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital. **Prüfen Sie zunächst, ob die Voraussetzungen erfüllt sind.**

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x}$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^2}$.

Name

Aufgabe 12: **2+3+3 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

1. $\int\limits_0^1 x^2 - e^x \, dx$.

2. $\int\limits_{2\ln\frac{\pi}{2}}^{2\ln\pi} \frac{1}{2}\cos(e^{\frac{1}{2}x})e^{\frac{1}{2}x} \, dx$. **Tipp:** $f(y) = \cos y$, $g(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.

3. $\int\limits_1^e x \ln x \, dx$. **Tipp:** partielle Integration.

Name

Aufgabe 13: **2+3 Punkte**

1. Zeigen Sie: Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ gilt $\left(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

2. Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int\limits_1^2 \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx$.
   Sie dürfen den ersten Teil auch dann verwenden, wenn Sie ihn nicht bearbeitet haben.