16.02.2013

Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele

# Klausur

## Mathematik für Naturwissenschaftler I
## WS 2012/2013

Beachten Sie bitte, dass außer Ihrem handbeschriebenen Blatt keine weiteren Hilfsmittel erlaubt sind! Sie müssen die Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten Papier bearbeiten. Falls Ihnen das Papier dabei ausgehen sollte, so können Sie sich jederzeit weiteres Papier geben lassen. Legen Sie bitte während der Klausur Ihren Studentenausweis gut sichtbar neben sich auf den Tisch. Bitte markieren Sie die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Falls Sie als Linkshänder Ihre Blätter am anderen Rand getackert haben wollen, dann melden Sie sich bitte.

**Hinweis zu den Aufgaben 1-3.** Hier müssen Sie in die Felder $W$ oder $F$ eintragen. Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt und für jede falsche Antwort einen halben Punkt Abzug. Sie können das Feld auch leer lassen. In diesem Fall gibt es keinen Punkt aber auch keinen Abzug. Die Punktzahl ist nach unten pro Aufgabe durch Null beschränkt.

**Dauer der Klausur: 12:15 bis 14:30 Uhr**

**Nachname:** ______________________

**Vorname:** ______________________

**Matrikelnummer:** ______________________

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| bearbeitet | | | | | | | |
| max. Punkte | 3 | 6 | 6 | 4 | 7 | 10 | 8 |
| erhaltene Punkte | | | | | | | |

| Aufgabe | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| bearbeitet | | | | | | |
| max. Punkte | 4 | 9 | 4 | 6 | 8 | 5 |
| erhaltene Punkte | | | | | | |

| $\Sigma$ Gesamt (max. 80) | |
|---|---|

**Viel Erfolg !!!**

Name

**Aufgabe 1:** **3 Punkte**

Welche der folgenden Aussagen ist wahr (W) und welche falsch (F)?

____ Jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist entweder injektiv oder surjektiv.

____ Falls die endlichen Mengen $C$ und $D$ gleich viele Elemente haben, so gilt $C \times D = D \times C$.

____ Die Menge $M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 4 \}$ stellt den Rand eines Kreises mit Radius 2 dar.

**Aufgabe 2:** **6 Punkte**

Welche der folgenden Aussagen ist wahr (W) und welche falsch (F)?

____ Jede reelle Zahl kann man auch als komplexe Zahl auffassen.

____ Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$.

____ Ein Polynom vom Grad 3 mit reellen Koeffizienten hat mindestens eine Nullstelle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

____ Ist $p$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, so gilt $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$. Daher ist die Anzahl der komplexen Nullstellen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten immer eine gerade Zahl.

____ Ist $z \in \mathbb{C}$ eine $n$-te Einheitswurzel, so ist für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ die Zahl $z^k \in \mathbb{C}$ ebenfalls eine $n$-te Einheitswurzel.

____ Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p$ ein Polynom vom Grad $n$ sei und $q$ ein Polynom vom Grad $k$ mit $0 < k \leq n$. Dann gibt es stets ein Polynom $h$ vom Grad $n - k$ und ein Polynom $r$ vom Grad $m < k$, so dass gilt $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$

**Aufgabe 3:** **6 Punkte**

Welche der folgenden Aussagen ist wahr (W) und welche falsch (F)?

____ Sind $k, l \in \mathbb{N}$ zwei beliebige natürliche Zahlen, so gilt stets $\binom{2k}{k} = \binom{2l}{l}$.

____ Die Folge $a_n = (-1)^n$ konvergiert für $n \to \infty$ sowohl gegen 1 als auch gegen $-1$.

____ Es gilt: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = \sum\limits_{k=1}^{6} (2k - 1) = -6 + 2 \sum\limits_{k=1}^{6} k$.

____ Da $f(x) = \frac{1}{x}$ eine ungerade Funktion ist gilt $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0$.

____ Sind $F$ und $G$ Stammfunktionen von $f$, so ist auch $F + G$ eine Stammfunktion von $f$.

____ Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f'(x) = -f'(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Name

## Aufgabe 4: 1+1+2 Punkte

Die Funktion $f$ sei definiert durch $f(x) = (x-1)^2 + 2$.

1. Geben Sie einen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ an, so dass $f$ auf $D$ injektiv ist.
2. Geben Sie nun einen Bildbereich $B \subset \mathbb{R}$ so an, dass $f : D \to B$ surjektiv ist.
3. Begründen Sie, warum die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to D$ existiert und geben Sie sie an.

**Name**

**Aufgabe 5:** **2+2+3 Punkte**

1. Schreiben Sie $z = \frac{1}{2+i}$ in der Form $z = a + ib$.
2. Schreiben Sie $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ in der Form $z = re^{i\varphi}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$.
3. Skizzieren Sie die Menge $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}(z + \frac{1}{2}\mathrm{Im}(z)) = 1 \right\}$.

Name

**Aufgabe 6:** **1+4+4+1 Punkte**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-4}$.

1. Geben Sie den Definitionsbereich von $f$ an. **Tipp:** Formen Sie die Funktion zunächst mit einer geeigneten binomischen Formel um.

2. Bestimmen Sie die Polstellen sowie das asymptotische Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$.

3. Bestimmen Sie alle Nullstellen und Extrema.

4. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

**Name**

**Aufgabe 7:** **2+2+2+2 Punkte**

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz für $n \to \infty$ und geben Sie den Grenzwert an, falls er existiert.

1. $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$, $n \geq 0$.
2. $b_n = \dfrac{n(-1)^n}{n^2}$, $n \geq 1$
3. $c_n = \begin{cases} n+1 \text{ falls } 1 \leq n \leq 100 \\ 200 \ln(1 - \frac{1}{n}) \text{ falls } n \geq 101 \end{cases}$.
4. $d_n = 1 - \sin(\frac{n\pi}{2})$, $n \geq 0$.

**Name**

**Aufgabe 8:** **2+2 Punkte**

1. Es sei $S_n = \sum_{k=0}^{n} (\sqrt{2})^k$. Berechnen Sie $S_7$.

2. Berechnen Sie $T = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^k$.

Name

**Aufgabe 9:** **2+2+2+3 Punkte**

Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen.
**Geben Sie dabei an, welche Ableitungsregeln Sie verwenden.**

1. $f(x) = x^3 \ln x$, $x \in (0, \infty)$.
2. $g(x) = \ln(\sin(x))$, $x \in (0, \pi)$.
3. $h(x) = \tan x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
4. $u(x) = a^x$, $a > 0, x \in \mathbb{R}$.

**Name**

**Aufgabe 10:** **4 Punkte**

Die Parabel $P$ sei symmetrisch bezüglich der $y$-Achse und habe eine Nullstelle im Punkt $x_0 = -2$ und außerdem im Punkt $x_1 = 1$ die Steigung 4. Geben Sie die Gleichung der Parabel an.

**Name**

**Aufgabe 11:** **2+4 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital. Prüfen Sie zunächst, ob die Voraussetzungen erfüllt sind.

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-3}{x^3+x-x^2-1}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{(\sin x)^2}$.

**Name**

**2+3+3 Punkte**

**Aufgabe 12:**
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

1. $\int\limits_0^\pi x - \cos x \, dx.$

2. $\int\limits_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} \, dx.$ **Tipp:** $f(y) = y^2$, $g(x) = \ln x$.

3. $\int\limits_{-1}^1 \frac{2}{x^2-4} \, dx.$ **Tipp:** Partialbruchzerlegung

Name

**Aufgabe 13:** **2+3 Punkte**

1. Skizzieren Sie die Funktion $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ und auch die Umkehrfunktion arctan.
2. Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$. **Tipp:** Untersuchen Sie die Funktion zunächst auf Symmetrie und beachten Sie $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$.