15.02.2014

Dr. Susanne Knies, Sarah Eckstein

Klausur

Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2013/2014

Beachten Sie bitte, dass außer Ihrem handbeschriebenen Blatt keine weiteren Hilfsmittel erlaubt sind! Sie müssen die Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten Papier bearbeiten. Falls Ihnen das Papier dabei ausgehen sollte, so können Sie sich jederzeit weiteres Papier geben lassen. Legen Sie bitte während der Klausur Ihren Studentenausweis gut sichtbar neben sich auf den Tisch. Bitte benutzen Sie ausschließlich Kugelschreiber, Filzstifte oder Füller in den Farben blau oder schwarz und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Falls Sie als Linkshänder Ihre Blätter am anderen Rand getackert haben wollen, dann melden Sie sich bitte.

Dauer der Klausur: 13:15 bis 15:30 Uhr

Nachname: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Studienfach: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	3	10	4	6	9	5	8
erhaltene Punkte							

Aufgabe	8	9	10
max. Punkte	6	4	5
erhaltene Punkte			

Σ (max. 60)	Note	

Viel Erfolg !!!

Name

Aufgabe 1: **2+1 Punkte**

a) Entscheiden Sie, ob die Folgen a_n und b_n für $n \to \infty$ konvergieren und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$b_n = \begin{cases} n & \text{für } n \leq 100, \\ \frac{n+1}{n} & \text{für } n > 100. \end{cases}$$

b) Gegeben ist die Folge $c_1 = 1$, $c_2 = \frac{1}{4}$, $c_3 = \frac{1}{9}$, $c_4 = \frac{1}{16}, \ldots$. Geben Sie eine explizite Darstellung der Folge c_n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ an.

Name

Aufgabe 2: **2+3+3+2 Punkte**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2-8}$.

a) Geben Sie den Definitionsbereich von f an und untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie.

b) Bestimmen Sie die Polstellen sowie das asymptotische Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$.

c) Bestimmen Sie alle Nullstellen und Minima und/oder Maxima.

d) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion für $x \in [-5, 5]$.

Name

Name

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Finden Sie ein Polynom zweiten Grades, das im Punkt $P_1 = (0/3)$ ein Maximum und an der Stelle $P_2 = (-2/0)$ eine Nullstelle hat.

Name

Aufgabe 4: **2+2+2 Punkte**

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen und notieren Sie alle Zwischenschritte:

a) $f(x) = 3^x$,

b) $f(x) = \ln(\sin(x)) + e^{\cos(x)}$,

c) $f(x) = \tan(x)$.

Name

Aufgabe 5: **2+2+2+3 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Integrale und notieren Sie alle Zwischenschritte. Verwenden Sie gegebenenfalls den ln-Trick, partielle Integration oder die Substitutionsregel.

a) $\int\limits_1^2 x^2 + e^x + \frac{1}{x}\, dx.$

b) $\int\limits_1^3 \frac{2x+7}{x^2+7x}\, dx.$

c) $\int\limits_0^\pi x \sin(x)\, dx.$

d) $\int\limits_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{1}{\sigma} \sin\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$.
Tipp: Substitution $f(y) = \sin(y)$ und $g(x) = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

Name

Aufgabe 6: **3+2 Punkte**

Ein Schachbrett hat 64 Felder. Es werden 128 Reiskörner zufällig auf das Schachbrett geworfen, wobei wir davon ausgehen, dass jedes Feld mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von den Reiskörnern getroffen wird.

a) Sie wählen ein Feld aus und definieren X als die Zufallsvariable, die die Anzahl der Reiskörner auf Ihrem Feld angibt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens drei Reiskörner auf Ihrem Feld landen? Gehen Sie dabei davon aus, dass X poissonverteilt ist und bestimmen Sie zunächst den Parameter μ.

b) Ihnen wird folgendes Spiel vorgeschlagen: Sie bezahlen 20 Euro Einsatz. Für jedes Reiskorn, das auf Ihrem Feld liegen bleibt, erhalten Sie 10 Euro. Welchen Gewinn oder Verlust können Sie bei diesem Spiel erwarten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie (abzüglich Ihres Einsatzes) mindestens 10 Euro Gewinn machen?

Hinweis: $e^{-2} \approx 0,14 = \frac{7}{50}$.

Name

Aufgabe 7: **2+2+4 Punkte**

Vor Ihnen stehen zwei Lostöpfe, in denen sich jeweils 3 Kugeln befinden, die mit den Zahlen 1 bis 3 nummeriert sind. Sie ziehen je einmal aus beiden Töpfen. Die Zufallsvariable X bezeichne die größte der beiden gezogenen Zahlen.

a) Geben Sie Ω und $X(\Omega)$ an.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

c) Gegeben sind die beiden Ereignisse E={"Es wird mindestens eine 1 gezogen"} und F={"Die größte Zahl ist eine 3"}. Berechnen Sie $P(E|F)$. Sind E und F voneinander unabhängig?

Name

Aufgabe 8: **3+3 Punkte**

Ein Haushalt gilt als arm, wenn er über weniger als die Hälfte des Durchschnittseinkommens verfügt. Die Haushaltsnettoeinkommen sind mit $\mu = 2000$ Euro und $\sigma = 1000$ Euro normalverteilt.

a) Wie hoch ist der Anteil armer Haushalte?

b) Über welches Nettoeinkommen verfügt ein Haushalt mindestens, damit er zu den reichsten 10% gehört?

Entnehmen Sie die benötigten Werte der Tabelle für Φ:

x	0	0,2	0,5	0,75	1	1,25	1,29	1,5	1,96	2,5	3,0
$\Phi(x)$	0,5	0,579	0,691	0,77	0,841	0,89	0,90	0,933	0,975	0,994	0,999

Name

Aufgabe 9: **2+2 Punkte**

a) Wie hoch wird ein Turm, der aus unendlich vielen übereinandergestapelten Würfeln besteht, deren Kantenlänge sich jeweils halbiert, wenn der Startwürfel die Kantenlänge 1 m hat?

b) Wie hoch würde der Turm werden, wenn man mit einem Würfel der Kantenlänge 1 m startet, jeder Würfel jedoch noch 80% der Kantenlänge des vorherigen Würfels hat?

Name

Aufgabe 10: **2+3 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls Sie dabei die Regel von l'Hospital verwenden, prüfen Sie zunächst, ob die Voraussetzungen erfüllt sind.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{e^x}$.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x \ln x}{x^2}$.