23.04.2014

Dr. Susanne Knies, Sarah Eckstein

Klausur

Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2013/2014

Beachten Sie bitte, dass außer Ihrem handbeschriebenen Blatt keine weiteren Hilfsmittel erlaubt sind! Sie müssen die Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten Papier bearbeiten. Falls Ihnen das Papier dabei ausgehen sollte, so können Sie sich jederzeit weiteres Papier geben lassen. Legen Sie bitte während der Klausur Ihren Studentenausweis gut sichtbar neben sich auf den Tisch. Bitte benutzen Sie ausschließlich Kugelschreiber, Filzstifte oder Füller in den Farben blau oder schwarz und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Falls Sie als Linkshänder Ihre Blätter am anderen Rand getackert haben wollen, dann melden Sie sich bitte.

Dauer der Klausur: 10:15 bis 12:30 Uhr

Nachname: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Studienfach: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	4	10	4	5	7	7	6
erhaltene Punkte							

Aufgabe	8	9	10
max. Punkte	5	8	4
erhaltene Punkte			

Σ (max. 60)	Note	

Viel Erfolg !!!

Name

Aufgabe 1: **1+1+2 Punkte**

a) Gegeben sei $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Entscheiden Sie, ob a_n konvergiert und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

b) Gegeben sei $b_n = \frac{n^2-1}{2n^2+8}$, $n \in \mathbb{N}$. Entscheiden Sie, ob b_n konvergiert und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

c) Gegeben ist die rekursiv definierte Folge

$$c_{n+1} = n(c_n - 1)^2,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \qquad \text{mit} \qquad c_1 = 2.$$

Berechnen Sie c_2, c_3, c_4 und c_5.

Name

Aufgabe 2: **2+3+3+2 Punkte**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x}$.

a) Geben Sie den Definitionsbereich von f an und untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie.

b) Bestimmen Sie die Polstellen sowie das asymptotische Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$.

c) Bestimmen Sie alle Nullstellen und Minima und/oder Maxima.

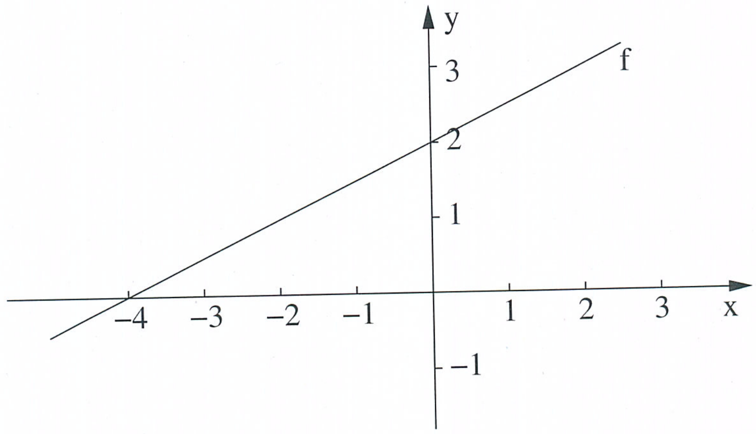
d) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion für $x \in [-5, 5]$.

Begründen Sie jede Ihrer Antworten, beispielsweise durch eine Rechnung!

Name

Aufgabe 3: **2+2 Punkte**

Gegeben sei die Gerade in der Skizze:



a) Geben Sie die Funktionsgleichung der skizzierten Funktion f an.

b) Geben Sie die Funktionsgleichung einer dazu parallelen Geraden an, die durch den Ursprung geht.

Begründen Sie Ihre Ergebnisse!

Name

Aufgabe 4: **1+3+1 Punkte**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x+1)^2 + 2$.

a) Skizzieren Sie die Funktion f.

b) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich von f so an, dass f umkehrbar ist. Berechnen Sie die Umkehrfunktion.

c) Tragen Sie f^{-1} in die Skizze aus Teil a) ein.

Name

Aufgabe 5: **2+2+3 Punkte**

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen und notieren Sie alle Zwischenschritte:

a) $f(x) = e^{(a+2)x}$, mit $a \in \mathbb{R}$,

b) $f(x) = \ln(x^2) + x^2$,

c) $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$.

Name

Aufgabe 6: **2+2+3 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Integrale und notieren Sie alle Zwischenschritte. Verwenden Sie gegebenenfalls den ln-Trick, partielle Integration oder die Substitutionsregel.

a) $\int_0^1 x - x^2 + e^x \, dx$.

b) $\int_0^2 \frac{3x^2}{x^3+1} \, dx$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(x)} \cos(x) \, dx$. Tipp: Substitutionsregel mit $f(y) = e^y$ und $g(x) = \sin(x)$.

Name

Aufgabe 7: **3+3 Punkte**

Ein Statistiker hat für den Juli eine Urlaubsreise nach Rom geplant. Es ist bekannt, dass die Mittagstemperatur X in Rom sich gut durch eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu = 25°C$ und $\sigma = 3°C$ beschreiben lässt.

a) Der Statistiker fühlt sich wohl, wenn die Temperatur mittags zwischen $19°C$ und $28°C$ liegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies der Fall?

b) Welche Mittagstemperatur wird an 90% der Tage in Rom **höchstens** erreicht?

Entnehmen Sie die benötigten Werte der Tabelle für Φ:

x	0	0,2	0,5	0,9	1	1,25	1,3	1,5	1,67	2,0	2,5	3,0
$\Phi(x)$	0,5	0,579	0,691	0,82	0,841	0,89	0,90	0,933	0,95	0,98	0,994	0,999

Name

Aufgabe 8: **2+3 Punkte**

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bienenvolk einen harten Winter überlebt, ist 0,5. Ein Imker besitzt 6 Völker.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 Völker den Winter überleben?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 einen harten Winter überleben?

Geben Sie Ihr Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an! Tipp: Binomialverteilung.

Name

Aufgabe 9: **2+2+4 Punkte**

In einer Urne befinden sich 2 rote und 3 blaue Kugeln.

a) Sie ziehen zweimal mit Zurücklegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie zwei gleichfarbige Kugeln ziehen? Fertigen Sie zunächst ein Baumdiagramm an.

b) Nun ziehen Sie ohne Zurücklegen. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen? Fertigen Sie auch für diesen Fall ein Baumdiagramm an.

c) Sie Ziehen wie im Teil b) ohne Zurücklegen und verstecken die im ersten Zug gezogene Kugel, ohne sie zuvor anzuschauen.
Betrachten Sie nun die Ereignisse A = "die erste gezogene Kugel ist rot" und B = "die zweite gezogene Kugel ist rot".

1. Berechnen Sie $P(B)$ und $P(A \cap B)$.
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die versteckte Kugel rot ist, unter der Bedingung, dass Sie im zweiten Zug ebenfalls rot gezogen haben?

Name

Aufgabe 10: **2+2 Punkte**

Ein Patient nimmt jeden Morgen über einen langen Zeitraum hinweg 25 mg eines Medikamentes ein. Im Laufe eines Tages werden 80% des in seinem Körper vorhandenen Wirkstoffs abgebaut, d.h. es verbleiben 20% in seinem Körper. S_i bezeichne die Stoffmenge, die sich unmittelbar nach der i-ten Einnahme insgesamt in seinem Körper befindet.

a) Berechnen Sie die Stoffmengen S_1, S_2, S_3 und S_4.

b) Stellen Sie eine langfristige Prognose auf, indem Sie die Formel für die unendliche geometrische Reihe benutzen.