# Nachklausur

- Beachten Sie bitte, dass außer Ihrem beidseitig handbeschriebenen Blatt keine weiteren Hilfsmittel erlaubt sind!
- Sie müssen die Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten Papier bearbeiten. Falls Ihnen das Papier dabei ausgehen sollte, so können Sie sich jederzeit weiteres Papier geben lassen.
- In den letzten 20 min der Bearbeitungszeit darf die Klausur nicht mehr vorzeitig abgegeben werden. Falls Sie während dieses Zeitraums fertig werden, bleiben Sie bitte bis zum Ende der Klausur ruhig an Ihrem Platz sitzen.
- Bitte benutzen Sie ausschließlich Kugelschreiber, Filzstifte oder Füller in den Farben blau oder schwarz und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie alle Ihre Ergebnisse, zum Beispiel durch eine Rechnung.

Dauer der Klausur: 10:15 bis 12:30 Uhr

Nachname: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Studienfach: ____________________

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| max. Punkte | 5 | 7 | 5 | 5 | 9 | 31 |
| erhaltene Punkte | | | | | | |

| Aufgabe | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| max. Punkte | 6 | 8 | 7 | 4 | 6 | 31 |
| erhaltene Punkte | | | | | | |

| $\Sigma$ (max. 62) | Note: | |
|---|---|---|

## Wir wünschen Ihnen viel Erfolg !!!

Name:

**Aufgabe 1** (2+3 Punkte)

a) Eine Population besteht aus 10 Individuen. 4 Individuen wandern aus und bilden eine neue Population. Wie viele mögliche $4$er-Gruppen gibt es?

b) Von den 10 Individuen der Population tragen von einem Gen $2$ Individuen das Allel A und 8 Individuen das Allel B in sich. Wie viele der möglichen $4$er Gruppen enthalten genau $2$, genau ein oder kein Individuum mit dem Allel A?

Name:

**Aufgabe 2** (2+2+3 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen und notieren Sie alle Zwischenschritte:

a) $f(x) = x^2 - ax$, mit $a \in \mathbb{R}$.

b) $g(x) = \sin(x)e^x$, für $x \in \mathbb{R}$.

c) $s(x) = (\ln(3x+1))^2$, für $x \in \mathbb{R}^+$.

Name:

**Aufgabe 3** (1+2+2 Punkte)

Bei einem Glücksspiel wird eine unsymmetrische Münze 5 mal geworfen. Die Seiten der Münze seien mit "$W$" für "Wappen" und "$Z$" für "Zahl" bezeichnet. Es sei $P(W) = \frac{1}{4}$ und $P(Z) = \frac{3}{4}$

a) Geben Sie die Ergebnismenge $\Omega$ an.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für genau viermal $W$.

c) Für jedes Mal "$Z$" werden dem Spieler 2 € ausgezahlt, bei einem Einsatz von 8 €. Wie hoch ist der Erwartungswert des Gewinnspiels?

Name:

**Aufgabe 4** **(1+3+1 Punkte)**

Eine Urne enthalte $3$ rote und $2$ grüne Kugeln.

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm für das Experiment "zweimal Ziehen **ohne** Zurücklegen".

b) Betrachten Sie die Ereignisse

$$E = \text{"Die zweite gezogene Kugel ist grün"},$$
$$F = \text{"Die erste gezogene Kugel ist rot"}.$$

Berechnen Sie $P(E)$ und die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Kugel rot ist unter der Bedingung, dass die zweite gezogene Kugel grün ist.

c) Sind $E$ und $F$ unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Name:

## Aufgabe 5 (6+3 Punkte)

1. Lösen die folgenden Gleichungen nach $x$ auf.

   a) $\ln(\sqrt{x^3}x^2) = 1$ b) $\ln(x^3) - \ln(x^2) = -1$ c) $\ln(\frac{3^x}{5^x}) = 2$

2. Berechnen Sie die folgenden Reihen. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse dabei so weit wie möglich.

   a) $\sum\limits_{k=0}^{5} 10^k$ b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{3}{\pi^k}$

Name:

## Aufgabe 6 (4+2 Punkte)

1) Ordnen Sie den Schaubildern jeweils eine der folgenden Funktionen zu, begründen Sie Ihre Antwort ( z. Bsp. durch Angabe von Nullstellen, asymptotischem Verhalten o.ä.).

a) $f_1(x) = x - 2$

b) $f_2(x) = \tan(x)$

c) $f_3(x) = e^{-x^2}$

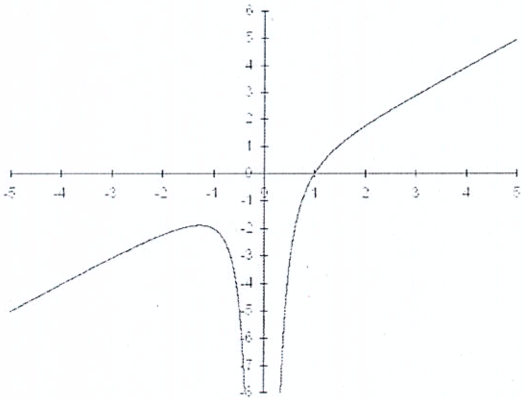
d) $f_4(x) = x^4 - 2x^2 - 1$

e) $f_5(x) = \sin(x) - 1$

f) $f_6(x) = \ln(2x)$

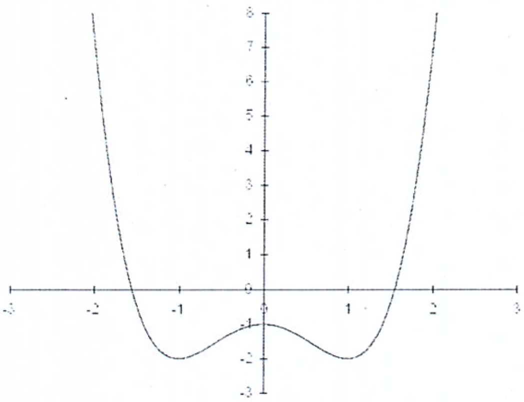
g) $f_7(x) = 2\,(x - 5)$

h) $f_8(x) = x - \frac{1}{x^2}$



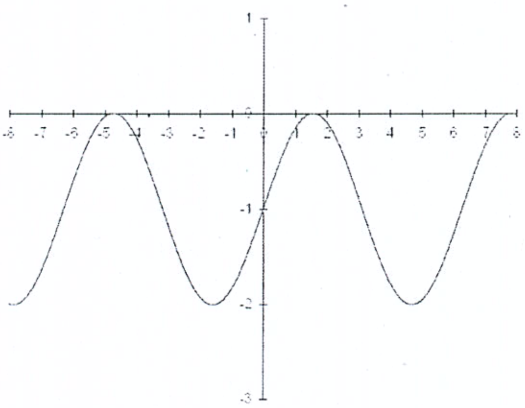
$f(x) =$

Begründung:



$f(x) =$

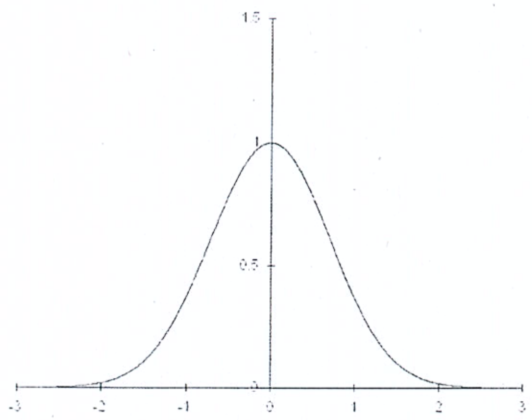
Begründung:



$f(x) =$

Begründung:

*(bitte wenden)*



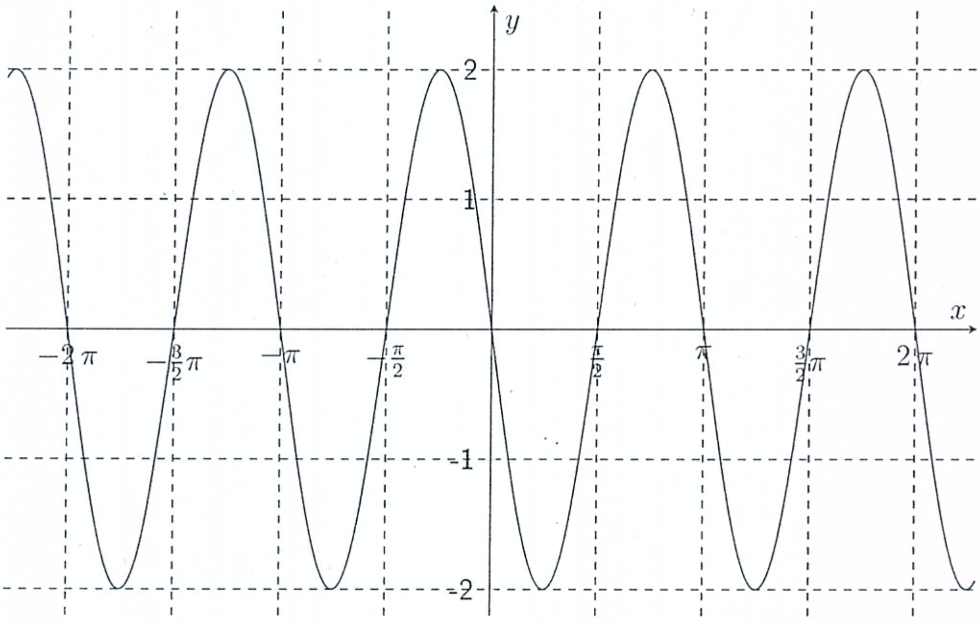

$f(x) =$

Begründung:

2) Geben ist die Funktion

$$f(x) = a\sin(bx) \ ,$$

bestimmen Sie die Parameter $a$ und $b$ anhand des folgenden Schaubilds.



Name:

**Aufgabe 7** (2+3+3 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale und notieren Sie alle Zwischenschritte. Verwenden Sie bei Bedarf die Regel zur partiellen Integration bzw. Substitution.

a) $I_1 = \int\limits_0^1 x^3 + e^x \, dx$

b) $I_2 = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) \, dx$

Hinweis: Es gilt $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und entnehmen Sie die Werte zur Berechnung des Integrals aus der folgenden Tabelle:

| $\sin(0)$ | $\sin(\frac{\pi}{4})$ | $\sin(\frac{\pi}{3})$ | $\cos(0)$ | $\cos(\frac{\pi}{4})$ | $\cos(\frac{\pi}{3})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

Berechnen Sie das folgende uneigentliche Integral und notieren Sie alle Zwischenschritte.

c) $I_4 = \int\limits_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} dt$ für $\lambda > 0$.

Name:

**Aufgabe 8** (1+2+2+2 Punkte)

Bei der Enzymkatalyse wird die Reaktionsgeschwindigkeit $v$ in Abhängigkeit der Konzentration vereinfacht beschrieben durch die Michaelis-Menten-Gleichung

$$v(s) = \frac{V_m\, s}{K_m + s} \tag{1}$$

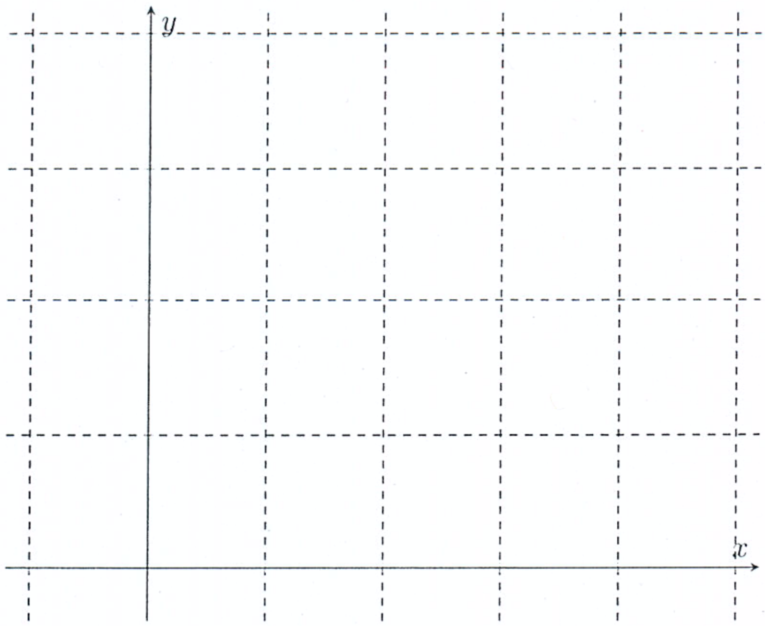
für $s \geq 0$. Hier bezeichnet die Variable $s$ die Konzentration, $K_m$ die Michaeliskonstante des Enzyms und $V_m$ eine weitere Konstante.

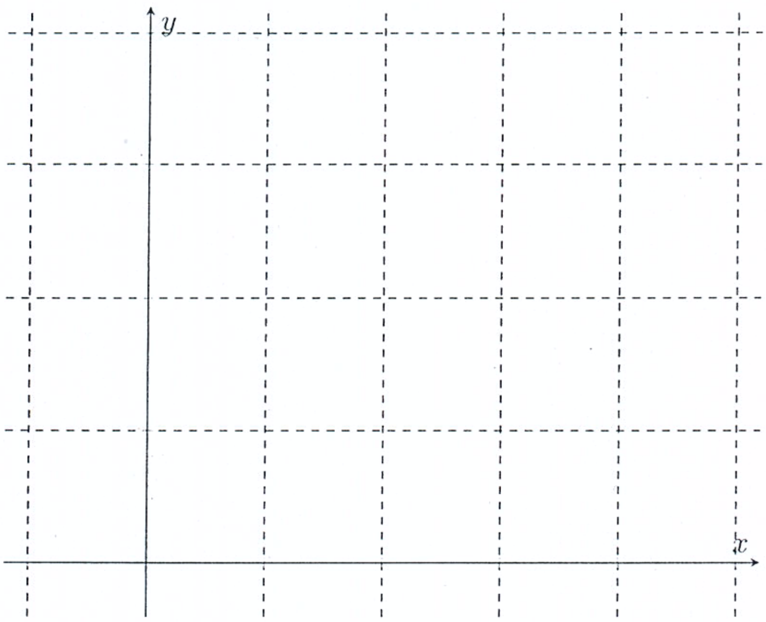
a) Berechnen Sie die Reaktionsgeschwindigkeit $v(s)$ im Falle $s = K_m$.

b) Berechnen Sie den Grenzwert
$$\lim_{s \to \infty} v(s).$$

c) Ist $v(s)$ monoton auf $\mathbb{R}_+$? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Fertigen Sie in dem Koordinatenkreuz auf der folgenden Seite eine Skizze von $v(s)$ für $s \geq 0$ an. Stellen Sie hierbei insbesondere Ihre Ergebnisse aus a), b) und c) dar.
(Bemerkung: Es ist **keine** vollständige Kurvendiskussion gewünscht.)


y
x

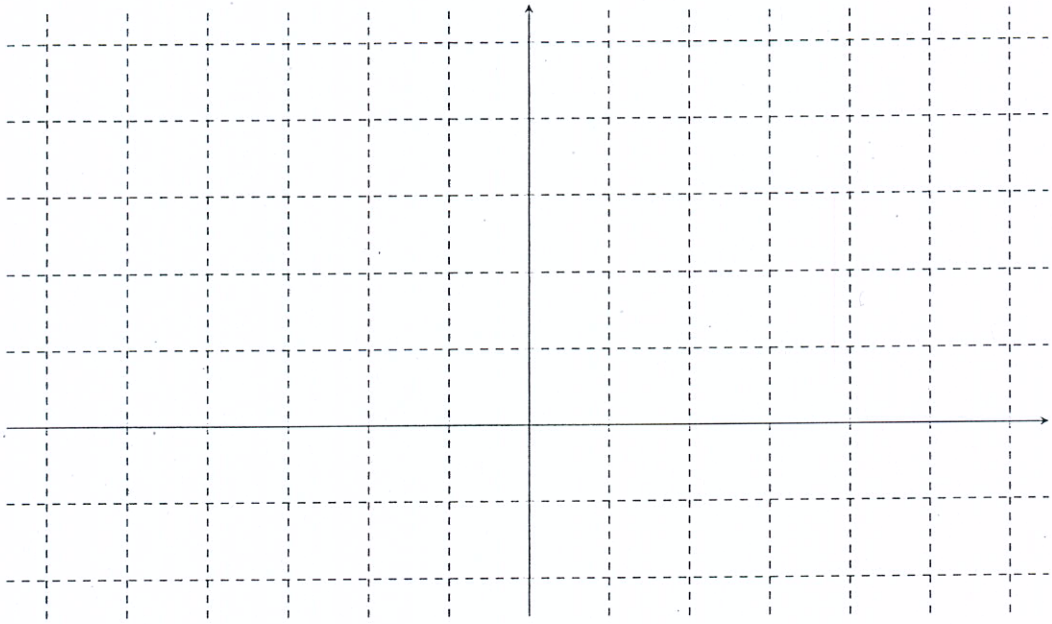

y
x

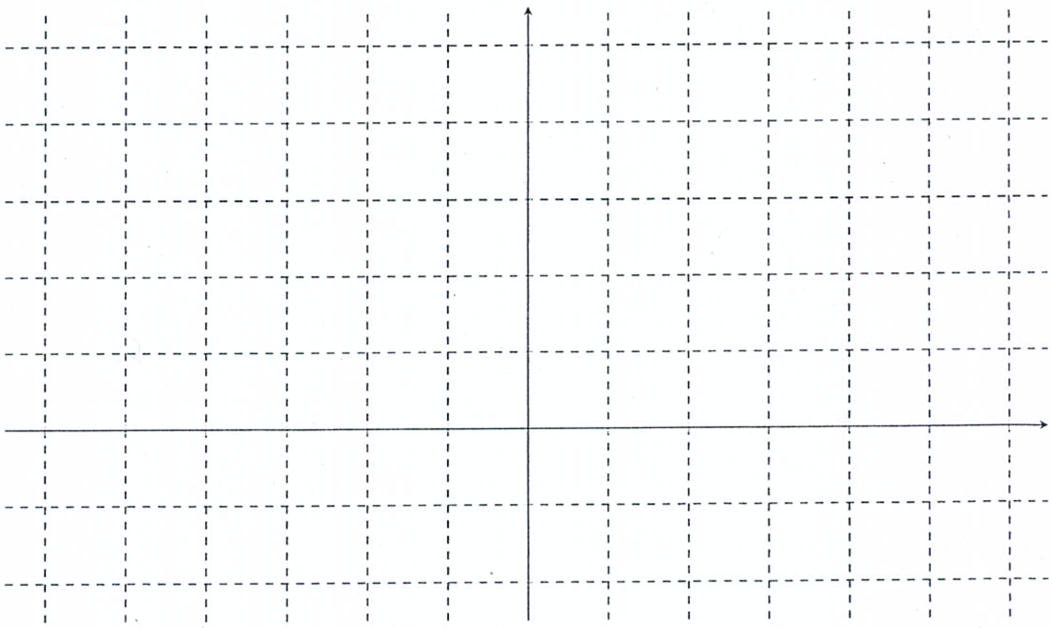
Name:

**Aufgabe 9** (2+2 Punkte)

Die Zufallsvariable $X$ sei $N(\mu, \sigma^2)$ - verteilt, mit $\mu = 100$ und $\sigma = 25$.

a) Fertigen Sie eine Skizze der Wahrscheinlichkeitsdichte sowie der Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $X$ in den Koordinatenkreuzen an. Achten Sie besonders auf die Beschriftung der Achsen.



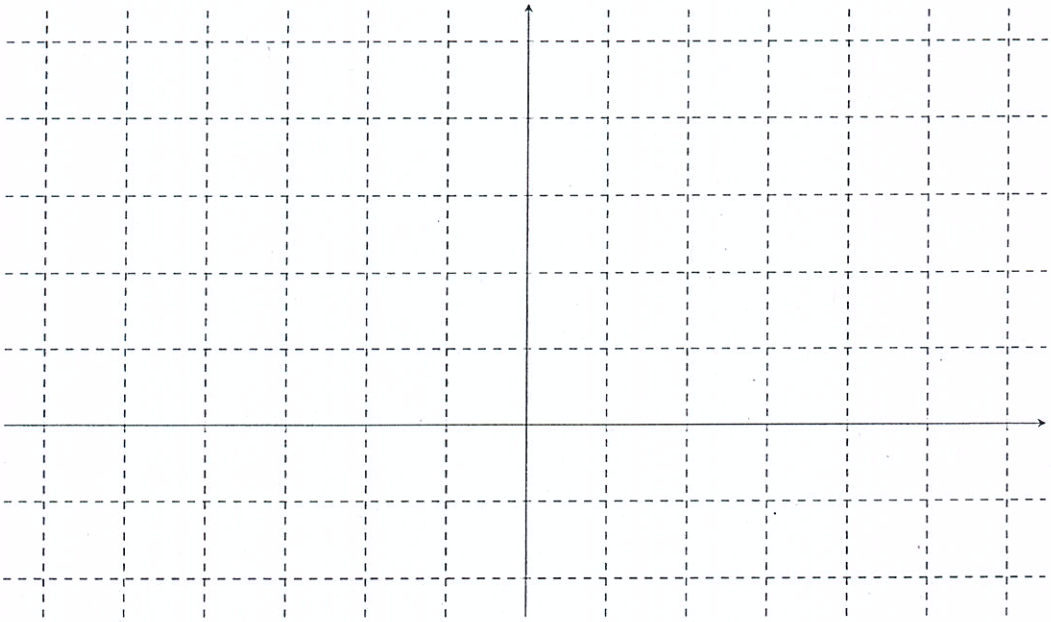


*(bitte wenden)*

b) Für $N(0;1)$-verteilte Zufallsvariablen haben Sie folgende Rechenregel kennen gelernt:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Fertigen Sie eine geeignete Skizze zur Veranschaulichung dieser Rechenregel an.



Name:

**Aufgabe 10** (3+2 Punkte)

Sie stehen auf einer Autobahnbrücke und beobachten die vorbei fahrenden Fahrzeuge. Ihnen fällt auf, dass im Schnitt alle $8$ Sekunden ein LKW vorbeifährt. Betrachten Sie die exponentialverteilte Zufallsvariable $X =$ "Zeit bis zum nächsten LKW".

a) Bestimmen Sie den Parameter $\lambda$ in der Wahrscheinlichkeitsdichte der Exponentialverteilung

$$p(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{sonst} \end{cases}$$

und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zeit bis der nächste LKW vorbei fährt höchstens $5$ Sekunden beträgt. Lassen Sie in Ihrem Ergebnis Terme der Form $e^{\cdots}$ stehen ohne diese zu berechnen.

b) In Aufgabe 9b) wurde die Rechenregel

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

für die Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ einer $N(0;1)$ - verteilten Zufallsvariablen betrachtet. Gilt diese Rechenregel auch für die Verteilungsfunktion $F(t)$ einer exponentialverteilten Zufallsvariablen? Zeichnen Sie eine geeignete Skizze die Ihre Behauptung veranschaulicht.