11.04.2016

Dr. Susanne Knies, Dr. Hannah Bergner

Nachklausur

Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2015/2016

- Beachten Sie bitte, dass außer Ihrem beidseitig handbeschriebenen Blatt keine weiteren Hilfsmittel erlaubt sind!
- Sie müssen die Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten Papier bearbeiten. Falls Ihnen das Papier dabei ausgehen sollte, so können Sie sich jederzeit weiteres Papier geben lassen.
- In den letzten 20 min der Klausur darf die Klausur nicht mehr vorzeitig abgegeben werden. Falls Sie während dieses Zeitraums fertig werden, bleiben Sie bitte bis zum Ende der Klausur ruhig an Ihrem Platz sitzen.
- Bitte benutzen Sie ausschließlich Kugelschreiber, Filzstifte oder Füller in den Farben blau oder schwarz und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie alle Ihre Ergebnisse, zum Beispiel durch eine Rechnung.

Dauer der Klausur: 10:15 bis 12:30 Uhr

Nachname: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Studienfach: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	6	6	7	5	5	7	7
erhaltene Punkte							

Aufgabe	8	9	10
max. Punkte	5	6	6
erhaltene Punkte			

Σ (max. 60)	Note	

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg !!!

Name

Aufgabe 1: **1+5 Punkte**

1. Schreiben Sie die Menge $A = \{x \in \mathbb{N} | \, x^3 > 1 \text{ und } x^2 < 35\}$ in aufzählender Form. (Hinweis: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$)

2. Vereinfachen Sie die folgenden Terme soweit wie möglich:

   (a) $\dfrac{e^5}{e^{6+\ln(2)}} - 3e^{-1}$

   (b) $\ln(2^{25}) + 7\ln\left(\dfrac{1}{8}\right)$

   (c) $7\ln(e) - 3\ln(\sqrt{2}e^2) + \dfrac{3}{2}\ln(2)$

Name

Aufgabe 2: **2+4 Punkte**

1. Untersuchen Sie die Folgen

$$a_n = \frac{3}{n^3+3} + n \quad \text{und} \quad b_n = \left(6 + \frac{7}{n+3+n^2}\right)\left(\frac{(n+11)(n+3)}{2n^2}\right)$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert, falls dieser exisitiert.

2. Sie bauen einen Turm aus Würfeln. Der unterste Würfel hat die Kantenlänge $l_0 = 1m$, der erste darauf liegende Würfel hat die Kantenlänge $l_1 = \frac{1}{2}m$ und die Kantenlänge l_k jedes weiteren Würfels entspricht der Hälfte der Kantenlänge l_{k-1} des darunter liegenden Würfels, die Kantenlänge wird also in jedem Schritt halbiert.

   (a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen l_k und l_{k-1}? Geben Sie eine rekursive Formel an.

   (b) Geben Sie eine explizite Formel für die Kantenlänge l_k an.

   (c) Geben Sie eine explizite Formel für die Höhe des Turmes, der aus $n+1$ Würfeln besteht, an.

   (d) Sie befinden Sich in einem Zimmer mit Deckenhöhe $2,5m$. Lässt sich in diesem Zimmer auf die oben beschriebene Weise ein Turm bis an die Decke bauen? Begründen Sie Ihre Antwort

Name

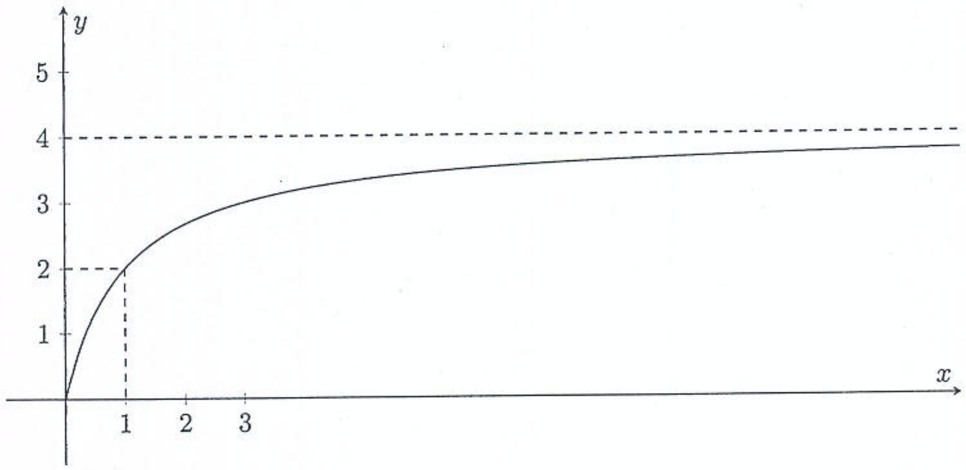
Aufgabe 3: **2+2+3 Punkte**

Bei der Enzymkatalyse wird die Reaktionsgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Konzentration vereinfacht beschrieben durch die Michaelis-Menten-Gleichung

$$v(s) = \frac{v_m\, s}{K + s}. \tag{1}$$

Hier bezeichnet die Variable s die Konzentration und $v_m > 0$ und $K > 0$ sind Konstanten.

1. Berechnen Sie $v(0)$ und $v(K)$.
2. Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von $v(s)$ für $s \to \infty$.
3. Bestimmen Sie die Parameter v_m und K und setzen Sie diese in die Gleichung von $v(s)$ ein, sodass der zugehörige Graph von v dem Graph in der Skizze entspricht.



Name

Aufgabe 4: **2+2+1 Punkte**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

1. Bestimmen Sie alle Minima und Maxima von f.
2. Bestimmen Sie alle Wendepunkte von f.
3. Ist f monoton? Begründen Sie Ihre Antwort.

Name

Aufgabe 5: **2+3 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Verwenden Sie dabei die Regel von l'Hospital und begründen Sie zunächst, dass die Voraussetzungen erfüllt sind.

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x) + x}{3x - 5}$.

b) $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin(x)}{e^{2x} - 2e^x + 1}$.

Name

Aufgabe 6: **4+3 Punkte**

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale und notieren Sie alle Zwischenschritte.

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x} - \frac{6}{\pi}x^2\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{-2x+2}{-x^2+2x+1}\,dx$

2. Existiert das folgende uneigentliche Integral? Falls ja, berechnen Sie den Wert.

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$$

Name

Aufgabe 7: **2+2+3 Punkte**

Es wird ein Mal mit zwei unterscheidbaren Würfeln gewürfelt. Sie untersuchen die beiden Ereignisse

$$E = \{\text{Die Augensumme ist } 5\}$$
$$F = \{\text{Der erste Würfel zeigt eine } 2\}.$$

a) Geben Sie die Ergebnismenge Ω und die Ereignisse E und F in Mengennotation an. Wie groß ist $|\Omega|$?

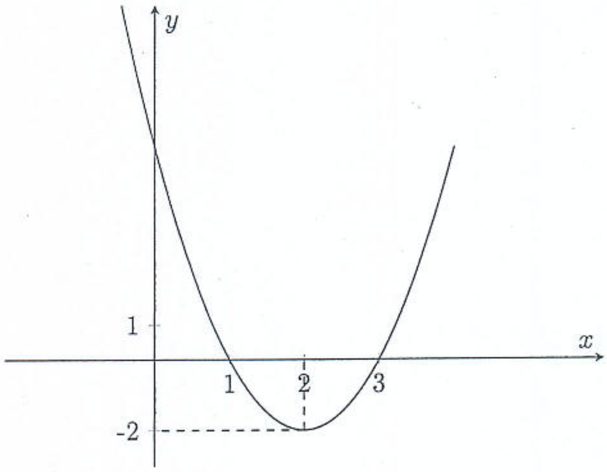
b) Berechnen Sie $P(E)$ und $P(F)$.

c) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(E|F)$. Sind E und F stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Name

Aufgabe 8: **5 Punkte**

Betrachten Sie die folgende Parabel:



1. Finden Sie eine Funktion f zu dieser Parabel.
2. Spiegeln Sie den Graphen an der x - Achse. Wie lautet nun die Funtkion?

Name

Aufgabe 9: **2+2+2 Punkte**

Bei einem Glücksspiel wird eine unsymmetrische Münze mit den Seiten "0" und "1" nacheinander 4 mal geworfen. Es sei die Wahrscheinlichkeit für " 1" $p = \frac{1}{3}$.

a) Geben Sie die Ergebnismenge Ω an. Wie groß ist $|\Omega|$?

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 mal die "1" fällt.

c) Für jede "1" werden dem Spieler 3 € ausgezahlt (ohne Einsatz zu zahlen). Berechnen Sie den zu erwartenden Gewinn des Glücksspiels.

Legen Sie die Binomialverteilung zugrunde.

Name

Aufgabe 10: 3+3 Punkte

Die Haushaltsnettoeinkommen seien mit $\mu = 2000$ € und $\sigma = 1000$ € normalverteilt.

a) Wie hoch ist der Anteil der Haushalte mit einem Einkommen zwischen 1500 € und 2500 €?

b) Wie hoch ist der Anteil der Haushalte mit einem Einkommen über 3000 €?

Entnehmen Sie die benötigten Werte der Tabelle für Φ:

x	0	0,2	0,5	0,75	1	1,25	1,29	1,5	1,96	2,5	3,0
$\Phi(x)$	0,5	0,579	0,691	0,77	0,841	0,89	0,90	0,933	0,975	0,994	0,999