**Name**

**Aufgabe 1:** **1+1+1 Punkte**

Entscheiden Sie, ob die Folgen $a_n$, $b_n$ und $c_n$ für $n \to \infty$ konvergieren und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an. Begründen Sie Ihre Ergebnisse!

a) $a_n := (n + \frac{1}{n})^2 - n^2$ für $n \geq 1$.

b) $b_n := \begin{cases} 3, & \text{für } n \leq 1000, \\ \frac{1}{n}, & \text{für } n > 1000. \end{cases}$

c) $c_n = 2(-1)^n - 2$ für $n \in \mathbb{N}$.

**Name**

**Aufgabe 2:** **2+3+3+1 Punkte**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$.

a) Geben Sie den Definitionsbereich von $f$ an und untersuchen Sie den Graphen von $f$ auf Symmetrie.

b) Bestimmen Sie die Polstellen, untersuchen Sie diese auf Vorzeichenwechsel und bestimmen Sie das asymptotische Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$.

c) Bestimmen Sie alle Nullstellen und Minima und/oder Maxima von $f$.

d) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion für $x \in [-4, 4]$.

**Name**

**Aufgabe 3:** **4 Punkte**

Finden Sie eine Parabel, die symmetrisch zur Parallelen zur $y$-Achse durch $x = 2$ ist, bei $x_0 = 4$ eine Nullstelle besitzt und im Punkt $x_1 = 3$ den Wert $-\sqrt{3}$ annimmt.
**Tipp:** Fertigen Sie zunächst eine Skizze an.

**Name**

**Aufgabe 4:** **3+1+1 Punkte**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x-3} + 2$.

a) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich von $f$ an und skizzieren Sie die Funktion $f$.

b) Berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}$ von $f$.

c) Tragen Sie $f^{-1}$ in die Skizze aus Teil a) ein.

**Name**

**Aufgabe 5:** **2+2+2+2 Punkte**

Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen. Notieren Sie alle Zwischenschritte und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich.

a) $f(x) = \sin(x^2 + 2)$,

b) $g(x) = e^{\ln(x)+3x}$,

c) $h(x) = 2^x + 2x$,

d) $u(x) = \frac{\cos(x)}{e^x}$.

**Name**

**Aufgabe 6:** **2+2+3 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Integrale und notieren Sie alle Zwischenschritte.

a) $\int\limits_0^1 2x - 4e^x \, dx$.

b) $\int\limits_1^2 x \ln(x) \, dx$.

c) $\int\limits_1^e \frac{\cos(\ln(x))}{x} \, dx$ **Tipp:** Substitution $f(y) = \cos(y)$, $g(x) = \ln(x)$.

Name

**Aufgabe 7:** **2+4 Punkte**

Sie besitzen einen Wald mit 10000 Bäumen. Die Größe der Bäume sei normalverteilt mit $\mu = 30m$ und $\sigma = 5m$. Nun wollen Sie die 2000 größten Bäume fällen.

a) Wie hoch ist der Anteil der Bäume, der gefällt werden soll? Zeichnen Sie außerdem die Gauß'sche Glockenkurve der Zufallsvariable $X =$"Größe der Bäume" und markieren Sie den zu fällenden Bereich.

b) Wie hoch muss ein Baum sein, damit er gefällt wird?

Entnehmen Sie die benötigten Werte der Tabelle für $\Phi$:

| $x$ | 0,2 | 0,5 | 0,75 | 0,84 | 1 | 1,25 | 1,29 | 1,5 | 1,96 | 2,5 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi(x)$ | 0,579 | 0,691 | 0,77 | 0,8 | 0,841 | 0,89 | 0,90 | 0,933 | 0,975 | 0,994 | 0,999 |

**Aufgabe 8:** **1+2+1+4 Punkte**

Eine Urne enthalte 3 rote und 2 grüne Kugeln.

a) Sie ziehen zehnmal **mit** Zurücklegen, $X$ sei die Anzahl der dabei gezogenen grünen Kugeln. Wie ist $X$ verteilt? Geben Sie die Formel an, mit der die Wahrscheinlichkeit für genau 2 grüne Kugeln berechnet werden kann.

b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von $X$.

c) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm für das Experiment "zweimal Ziehen **ohne** Zurücklegen".

d) Betrachten Sie die Ereignisse

$E =$ "Die zweite gezogene Kugel ist grün",
$F =$ "Die erste gezogene Kugel ist rot".

Berechnen Sie $P(E)$ und die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Kugel rot ist wenn die zweite gezogene Kugel grün ist. Sind $E$ und $F$ unabhängig?

Name

**Aufgabe 9:** **2+3 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Verwenden Sie dabei die Regel von l'Hospital und begründen Sie zunächst, dass die Voraussetzungen erfüllt sind.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{e^{2x}+3}$.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$.

**Name**

**Aufgabe 10:** **2+2+2 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Reihen. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse dabei so weit wie möglich.

a) $\sum\limits_{k=0}^{9} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k}$