20.07.2013

Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele

Klausur

Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2013

Beachten Sie bitte, dass außer Ihrem handbeschriebenen Blatt keine weiteren Hilfsmittel erlaubt sind! Sie müssen die Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten Papier bearbeiten. Falls Ihnen das Papier dabei ausgehen sollte, so können Sie sich jederzeit weiteres Papier geben lassen. Legen Sie bitte während der Klausur Ihren Studentenausweis gut sichtbar neben sich auf den Tisch. Bitte markieren Sie die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Falls Sie als Linkshänder Ihre Blätter am anderen Rand getackert haben wollen, dann melden Sie sich bitte.

Dauer der Klausur: 9:15 bis 11:30 Uhr

Nachname: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Studienfach: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5
max. Punkte	6	6	8	8	4
erhaltene Punkte					

Aufgabe	6	7	8	9	10
max. Punkte	6	3	4	7	8
erhaltene Punkte					

Σ (max. 60)	Note	

Viel Erfolg !!!

Name

Aufgabe 1: **2+4 Punkte**

Eine Urne enthalte 1 rote, 4 schwarze und 5 weiße Kugeln.

1. Sie ziehen aus der Urne drei Kugeln **mit** Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge. Wieviele Möglichkeiten gibt es, zwei weiße und eine rote Kugel zu ziehen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit hierfür?

2. Nun werden aus der Urne zwei Kugeln **ohne** Zurücklegen aber **mit** Beachtung der Reihenfolge gezogen. Außerdem verstecken Sie die im ersten Zug gezogene Kugel, ohne sie zuvor anzuschauen.
   Betrachten Sie nun die Ereignisse $A =$ "die erste gezogene Kugel ist schwarz" und $B =$ "die zweite gezogene Kugel ist schwarz".

   (a) Berechnen Sie $P(B)$ und $P(A \cap B)$.

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die versteckte Kugel schwarz ist, unter der Bedingung, dass Sie im zweiten Zug ebenfalls schwarz gezogen haben?

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A : rote Kugel 1. Zug

B : rote Kugel 2. Zug

$$P(A \cap B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4\ 2} \qquad P(B) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{10}$$

$$P(A \mid B) = \frac{1/10}{3/4} = \frac{1}{\cancel{10}_{5}} \cdot \frac{4^{2}}{3} = \frac{2}{15}$$

Name

Aufgabe 2: **3+3 Punkte**

Das Alter von Besuchern der Freiburger Herbstmesse sei normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 35$ und Standardabweichung $\sigma = 10$.

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Besucher jünger als 50 und gleichzeitig älter als 20 ist.

2. Finden Sie die Zahl x_0, für die das Alter von 80 Prozent aller Besucher um weniger als x_0 vom Erwartungswert abweicht.

Hinweis: Benutzen Sie folgende Wertetabelle der Standardnormalverteilung:

$\Phi(x)$	0,88	0,90	0,92	0,93	0,94
x	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6

Name

Aufgabe 3: **1+2+2+3 Punkte**

Sie werfen mit Ihrem Freund dreimal eine faire Münze. Werfen Sie "Kopf", gewinnen Sie 10 Euro und bei "Zahl" verlieren Sie 5 Euro.

1. Geben Sie die Ergebnismenge Ω an.
2. Die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ gebe Ihren Gesamtgewinn an. Geben Sie den Wertebereich $X(\Omega)$ von X an.
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie 0 Euro gewinnen?
4. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Name

Aufgabe 4: **2+2+4 Punkte**

Die Matrix A sei gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.
2. Berechnen Sie die Eigenwerte von A.
3. Berechnen Sie Eigenvektoren zu den jeweiligen Eigenwerten in parametrisierter Form.

Name

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Geben Sie eine parametrisierte Form sowie die Dimension der Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems an:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 8x_4 &= 0 \\ 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ x_3 + 3x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Name

Aufgabe 6: **1+3+2 Punkte**

Gegeben seien die Vektoren $x_0 = (1, 2, 1)$, $u = (2, 0, 3)$ und $v = (1, 1, 2)$.

1. Finden Sie einen Vektor w der sowohl auf u als auch auf v senkrecht steht.
2. Geben Sie die Hesseform der Ebene $E := \{ \, x_0 + ru + sv \mid r, s \in \mathbb{R} \, \}$ an.
3. Berechnen Sie den den Abstand des Punktes $p = (1, 1, 3)$ von der Ebene E.

Tipp:

$$u \times v := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ u_3 v_1 - v_3 u_1 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{pmatrix}$$

Name

Aufgabe 7: **3 Punkte**

Gegeben seien zwei $(n \times n)$-Matrizen A, B. Der Vektor $v_0 \in \mathbb{R}^n$ sei sowohl Eigenvektor von A zum Eigenwert λ als auch von B zum Eigenwert μ. Zeigen Sie, dass v_0 dann auch ein Eigenvektor von $C := AB$ zum Eigenwert $\lambda\mu$ ist.

Name

Aufgabe 8: **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass für $a, b, K, u_0 \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ durch

$$u(t) = \frac{K}{b} - \frac{K}{b} e^{-\frac{b}{a}t} + u_0 e^{-\frac{b}{a}t}$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$au'(t) + bu(t) = K$$

gegeben ist. Zeigen Sie außerdem, dass $u(0) = u_0$ gilt.

Name

Aufgabe 9: **6+1 Punkte**

1. Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Lösungsformel:

$$u'(t) + \frac{u(t)}{t} = t, \quad u(1) = \frac{4}{3},$$

   für $t \geq 1$.

2. Wie verhält sich die Lösung u für $t \to \infty$?

Name

Aufgabe 10: **1+5+2 Punkte**

Betrachten Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$
\begin{aligned}
x' &= 2x + 2,5y \\
y' &= 2x - 2y.
\end{aligned}
$$

1. Schreiben Sie das System in vektorieller Form $z' = Az$.
2. Die Eigenwerte der Matrix A lauten $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 3$. Geben Sie eine allgemeine Lösung z des Differentialgleichungssystems an.
3. Geben Sie eine Lösung z mit $z(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ an.