14.10.2014

Dr. Susanne Knies, Sarah Eckstein

Klausur

Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2014

Beachten Sie bitte, dass außer Ihrem handbeschriebenen Blatt keine weiteren Hilfsmittel erlaubt sind! Sie müssen die Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten Papier bearbeiten. Falls Ihnen das Papier dabei ausgehen sollte, so können Sie sich jederzeit weiteres Papier geben lassen. Legen Sie bitte während der Klausur Ihren Studentenausweis gut sichtbar neben sich auf den Tisch. Bitte benutzen Sie **nicht** die Farben rot und grün. Falls Sie als Linkshänder Ihre Blätter am anderen Rand getackert haben wollen, dann melden Sie sich bitte.

Dauer der Klausur: 09:15 bis 11:30 Uhr

Nachname: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Studienfach: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	5	6	7	5	6	6	4
erhaltene Punkte							

Aufgabe	8	9	10
max. Punkte	7	6	8
erhaltene Punkte			

Σ (max. 60)	Note	

Viel Erfolg !!!

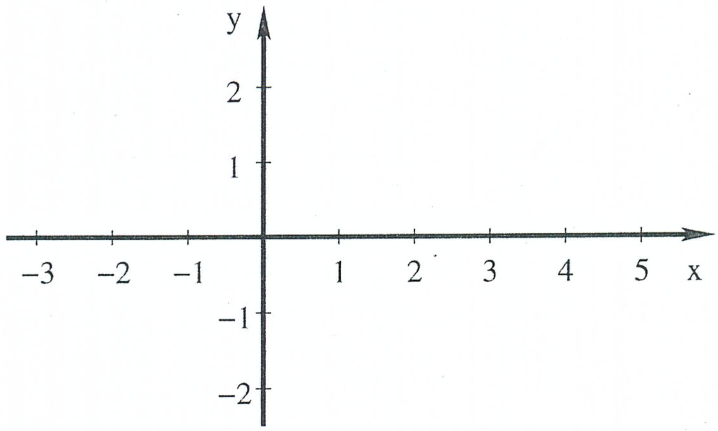
Name

Aufgabe 1: **2+3 Punkte**

Gegeben seien die Punkte $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} d \\ 2 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$, wobei $d \in \mathbb{R}$.

a) Zeichnen Sie die Punkte A, B und C in das vorgegebene Koordinatensystem ein. Bestimmen Sie nun d so, dass $\vec{AD}$ und $\vec{AB}$ einen rechten Winkel einschließen und begründen Sie Ihre Antwort durch eine Rechnung.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$.



Aufgabe 2: **6 Punkte**

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad &= -3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 3: **4+3 Punkte**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und die Menge K im $\mathbb{R}^2$:

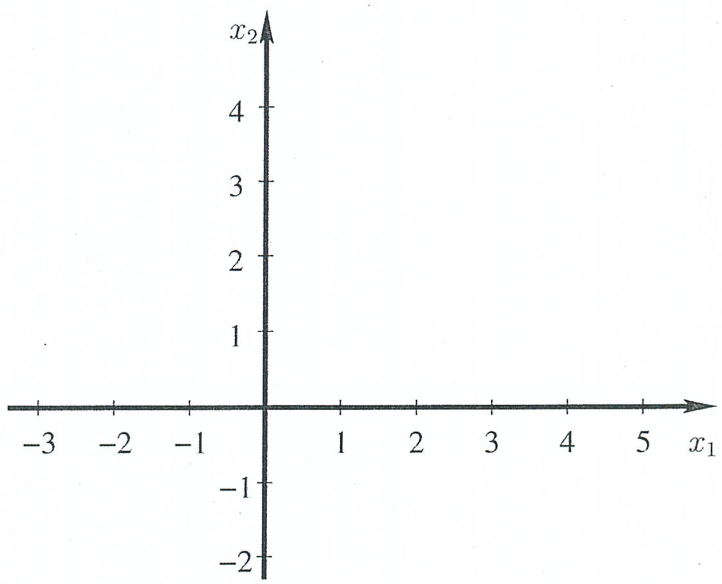
$$K := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \}.$$

a) Skizzieren Sie die Menge K und die Menge

$$A(K) := \{ A\vec{x} \,|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K \}$$

und begründen Sie Ihre Antwort.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von K und $A(K)$.



Aufgabe 4: **5 Punkte**

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von A.

Aufgabe 5: **3+3 Punkte**

a) Bringen Sie z in die Form $z = x + iy$.

(i) $z = i(3 - i)$

(ii) $z = (2 + i)^2$

(iii) $z = (1 - i)(i - 1)$

b) Bringen Sie z in die Form $z = x + iy$.

(i) $z = \frac{1}{3+2i}$

(ii) $z = \frac{1+i}{2-i}$

Aufgabe 6: **2+4 Punkte**

a) Gegeben ist der Punkt $z_1 = 1 + i \in \mathbb{C}$. Zeichnen Sie z_1 sowie die Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C} \big| \, |z - z_1| = 1\}$$

in der komplexen Zahlenebene.

b) Gegeben ist der Punkt $z = e^{\frac{1}{4}\pi i}$ in Polarkoordinaten. Berechnen Sie z^{15} rechnerisch oder zeichnerisch und geben Sie das Ergebnis in der Form $x + iy$ an. Tipp: $e^{2\pi i} = 1$.

Sie können bei Bedarf die folgende Tabelle verwenden:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin(\varphi)$	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	-1	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	-1	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1

Aufgabe 7: **2+2 Punkte**

a) Bestimmen Sie die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $4z^2 - 12z + 10 = 0$.

b) Geben Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ an, für die $z^2 \neq |z|^2$ gilt. Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Rechnung.

Aufgabe 8: **2+2+3 Punkte**

Gegeben ist die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + 13y' + 40y = 0.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Gleichung und berechnen Sie dessen Nullstellen.

b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

c) Bestimmen Sie die Konstanten in der allgemeinen Lösung so, dass die Anfangswerte $y(0) = 0$ und $y'(0) = 3$ angenommen werden.

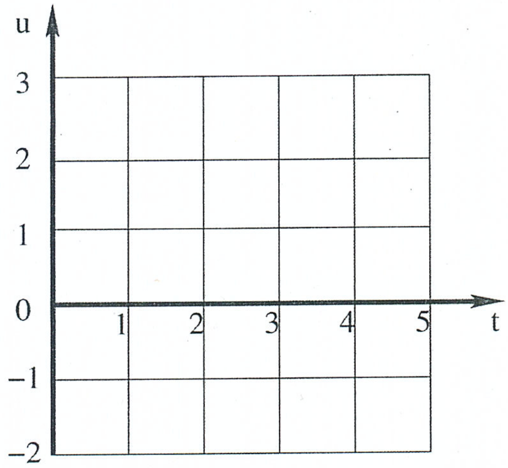
Aufgabe 9: **4+2 Punkte**

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$u' = (u+1)(u-2)$$

a) Zeichnen Sie in das vorgegebene Koordinatensystem das Richtungsfeld ein. Zeichnen Sie außerdem für die Anfangswerte $u(0) = 0$ und $u(0) = 2$ Lösungskurven ein.
Für diese Skizze dürfen Sie einen Bleistift verwenden.

b) Bestimmen Sie die stationären Punkte. Entscheiden Sie, ob die Punkte anziehend stabil oder instabil sind. Begründen Sie Ihre Antwort!



Aufgabe 10: **5+3 Punkte**

Gegeben ist die Differentialgleichung mit Anfangswert

$$u'(t) + \frac{1}{t}u(t) = t, \qquad u(1) = \frac{4}{3}, \qquad t \geq 1.$$

a) Lösen Sie die gegebene Differentialgleichung mit Hilfe der Lösungsformel für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung. Beachten Sie: $t_0 \neq 0$!

b) Machen Sie eine Probe, d.h. rechnen Sie nach, dass die in Teil a) gefundene Funktion auch tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung ist. Überprüfen Sie auch den Anfangswert.