05.08.2014

Dr. Susanne Knies, Sarah Eckstein

Klausur

Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2014

Beachten Sie bitte, dass außer Ihrem handbeschriebenen Blatt keine weiteren Hilfsmittel erlaubt sind! Sie müssen die Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten Papier bearbeiten. Falls Ihnen das Papier dabei ausgehen sollte, so können Sie sich jederzeit weiteres Papier geben lassen. Legen Sie bitte während der Klausur Ihren Studentenausweis gut sichtbar neben sich auf den Tisch. Bitte benutzen Sie **nicht** die Farben rot und grün. Falls Sie als Linkshänder Ihre Blätter am anderen Rand getackert haben wollen, dann melden Sie sich bitte.

Dauer der Klausur: 09:15 bis 11:30 Uhr

Nachname: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Studienfach: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	5	6	7	5	6	7	4
erhaltene Punkte							

Aufgabe	8	9	10
max. Punkte	7	6	8
erhaltene Punkte			

Σ (max. 61)	Note	

Viel Erfolg !!!

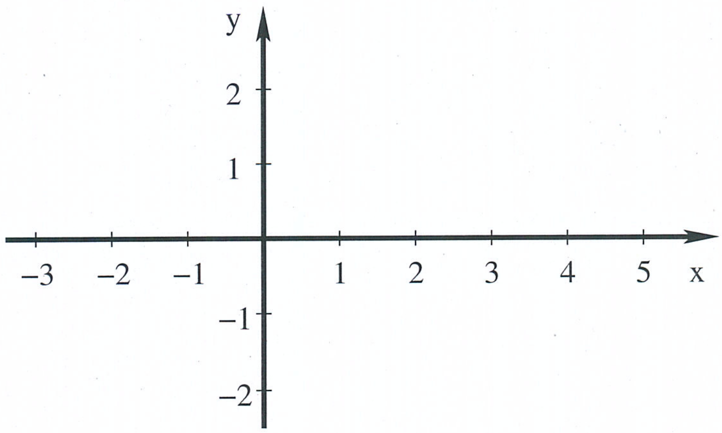
Name

Aufgabe 1: **2+3 Punkte**

Gegeben seien die Punkte $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$.

a) Zeichnen Sie die Punkte A, B und C in das gegebene Koordinatensystem ein und zeigen Sie, dass das Dreieck ABC im Punkt C einen rechten Winkel hat.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang des rechtwinkligen Dreiecks ABC.



Aufgabe 2: **6 Punkte**

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 \quad &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 \quad &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 3: **4+3 Punkte**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und die Menge Q im $\mathbb{R}^2$:

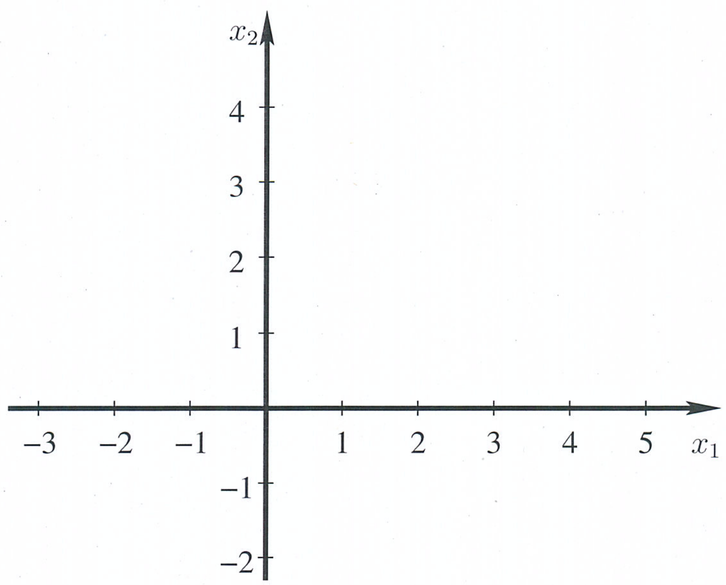
$$Q := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x_1 \leq 2 \, \text{und} \, 0 \leq x_2 \leq 1 \}.$$

a) Skizzieren Sie die Menge Q und die Menge

$$A(Q) := \{ A\vec{x} \,|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in Q \}.$$

Tipp: Überlegen Sie zunächst, wohin die 4 Eckpunkte von Q durch die Matrix A abgebildet werden.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von $A(Q)$.



Aufgabe 4: **1+4 Punkte**

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Determinante von A.

b) Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} und lösen Sie $A\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestätigen Sie Ihr Ergebnis für $\vec{x}$ durch eine Proberechnung.

Aufgabe 5: **3+3 Punkte**

a) Bringen Sie z in die Form $z = x + iy$.

(i) $z = (3 + i)i$

(ii) $z = (1 + i)^2$

(iii) $z = (2 + 2i)(\frac{1}{2} - i)$

b) Bringen Sie z in die Form $z = x + iy$.

(i) $z = \frac{1}{2+2i}$

(ii) $z = \frac{1-i}{1+3i}$

Aufgabe 6: **3+4 Punkte**

a) Bestimmen Sie eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ so, dass $z^2 = i$ gilt. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch eine Rechnung.
Hinweis: Sie können z zeichnerisch oder mit Hilfe von Polarkoordinaten bestimmen - beides ist erlaubt, sofern Sie den Rechenweg oder die Skizze erläutern.

b) Gegeben ist der Punkt $z = e^{\frac{3\pi}{4}i}$ in Polarkoordinaten. Berechnen Sie z^7 rechnerisch oder zeichnerisch und geben Sie das Ergebnis in der Form $x + iy$ an. Tipp: $e^{2\pi i} = 1$.

Sie können bei Bedarf die folgende Tabelle verwenden:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin(\varphi)$	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	-1	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	-1	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1

Aufgabe 7: **2+2 Punkte**

a) Bestimmen Sie die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $4z^2 - 12z + 10 = 0$.

b) Gegeben ist die quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten:

$$z^2 + az + b = 0, \qquad \text{mit } a,\ b \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie: Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung, so ist auch das komplex konjugierte $\overline{z}$ eine Lösung.

Aufgabe 8: **3+3+1 Punkte**

Gegeben ist die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

a) Finden Sie mit Hilfe des Exponentialansatzes $y_1(t) = e^{\lambda t}$ eine Lösung der Differentialgleichung.

b) Rechnen Sie nach, dass $y_2(t) = te^{-3t}$ ebenfalls eine Lösung ist.

c) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

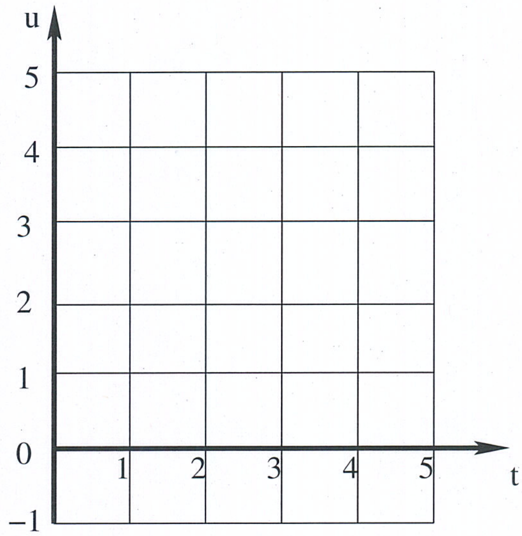
Aufgabe 9: **4+2 Punkte**

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$u' = \frac{1}{3}(u-3)u$$

a) Zeichnen Sie in das vorgegebene Koordinatensystem das Richtungsfeld ein. Zeichnen Sie außerdem für die Anfangswerte $u(0) = 1,5$ und $u(0) = 3,5$ Lösungskurven ein.
Für diese Skizze dürfen Sie einen Bleistift verwenden.

b) Bestimmen Sie die stationären Punkte. Entscheiden Sie, ob die Punkte anziehend stabil oder instabil sind. Begründen Sie Ihre Antwort!



Aufgabe 10: **1+5+2 Punkte**

Betrachten Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} u_1' &= 4u_1 + 4u_2 \\ u_2' &= u_1 + 4u_2 \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie das System in vektorieller Schreibweise $\vec{u}' = A\vec{u}$.

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung $\vec{u}$ des Systems.

c) Finden Sie eine Lösung $\vec{u}$ mit $\vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.