28.07.2015

Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele

Klausur

Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2015

- Beachten Sie bitte, dass außer Ihrem handbeschriebenen Blatt keine weiteren Hilfsmittel erlaubt sind!
- Sie müssen die Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten Papier bearbeiten. Falls Ihnen das Papier dabei ausgehen sollte, so können Sie sich jederzeit weiteres Papier geben lassen.
- Bitte benutzen Sie ausschließlich Kugelschreiber, Filzstifte oder Füller in den Farben blau oder schwarz und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie alle Ihre Ergebnisse, zum Beispiel durch eine Rechnung.

Dauer der Klausur: 13:15 bis 15:30 Uhr

Nachname: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Studienfach: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	8	4	8	6	7	3	8
erhaltene Punkte							

Aufgabe	8	9	10
max. Punkte	6	6	6
erhaltene Punkte			

Σ (max. 62)	Note	

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg !!!

Name

Aufgabe 1: **2+2+2+2 Punkte**

a) Berechnen Sie $(3+2i)(1+i)i$.

b) Schreiben Sie $z = \frac{2}{1+i}$ in der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

c) Berechnen Sie die Nullstellen des Polynoms $p(z) = 3z^2 + 6z + 9$.

d) Sei $z = 1 - i$. Drücken Sie z in Polarkoordinaten aus und berechnen Sie z^8.

Name

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Gegeben sei eine Uhr deren Stundenzeiger die Länge 2/3 und deren Minutenzeiger die Länge 1 habe. Geben Sie die Position der Uhrzeigerspitzen um 16.00 Uhr in der Form $z_h = a + ib$ und $z_{min} = x + iy$ mit $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ an. Verwenden Sie dazu auch folgende Tabelle:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Name

Aufgabe 3: **2+2+4 Punkte**

Die Matrix A sei gegeben als

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

c) Berechnen Sie Eigenvektoren zu den jeweiligen Eigenwerten in parametrisierter Form.

Name

Aufgabe 4: **3+3 Punkte**

Seien $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Erklären Sie, was die folgenden Mengen anschaulich darstellen und geben Sie ihre jeweilige Dimension an.

a) $M_1 := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \mathbf{u} = t\mathbf{w} \text{ für } t \in \mathbb{R} \right\}$.

b) $M_2 := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \right\}$.

Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

Name

Aufgabe 5: **1+4+2 Punkte**

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= b_2 \\ x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass Sie das Gleichungssystem in der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ schreiben können, wobei $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie A^{-1}.

c) Bestimmen Sie für die gegebenen rechte Seite $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Lösung $\mathbf{x}$ des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Name

Aufgabe 6: **3 Punkte**

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sei ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie, dass $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor der Matrix A^3 zum Eigenwert λ^3 ist.

Name

Aufgabe 7: **1+3+2+2 Punkte**

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$u' = u^2 - 1.$$

a) Bestimmen Sie die stationären Punkte der Gleichung.

b) Sind die stationären Punkte anziehend stabil oder instabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Skizzieren Sie in dem gegebenen Koordinatensystem das Richtungsfeld für

$$u' = u^2 - 1$$

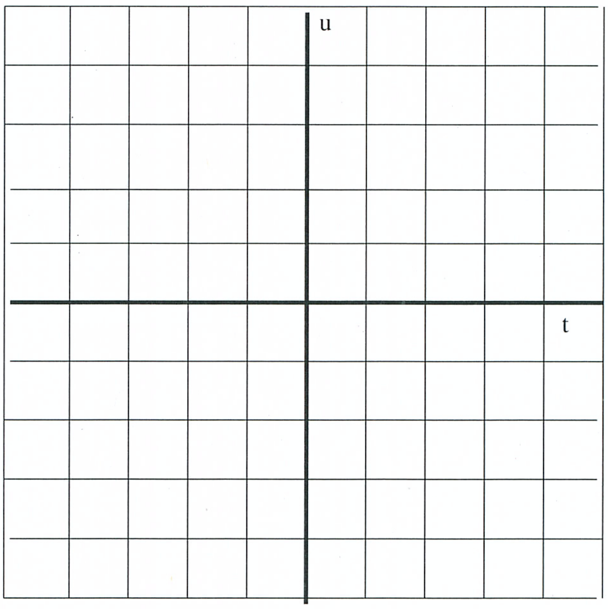
im Bereich $t \in [-2, 2]$ und $u \in [-2, 2]$, wobei als Einheit 2 Kästchen zu wählen sind.

d) Skizzieren Sie Lösungskurven, welche durch die Punkte

   i) $u(-2) = -1/2$

   ii) $u(0) = 2$

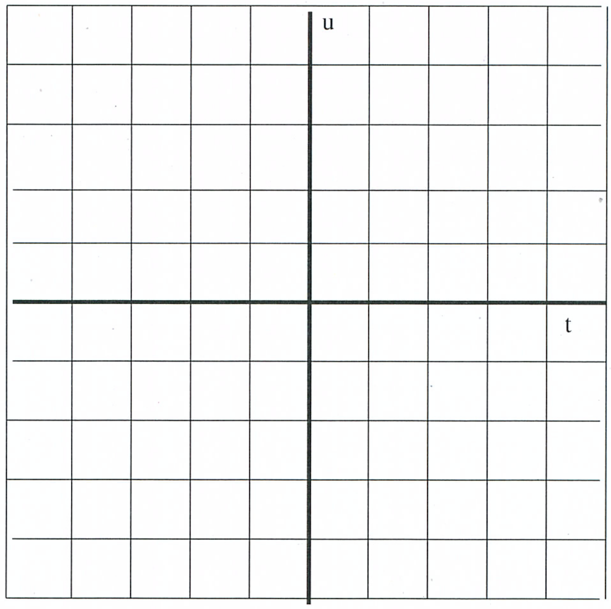
   verlaufen, für $t \in [-2, 2]$.



Name

Aufgabe 7:

Ersatzkoordinatensystem für eventuelle Korrekturen.



Name

Aufgabe 8: **4+2 Punkte**

a) Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$u'(t) + \beta u(t) = \kappa, \quad u(0) = u_0,$$

für $\beta, \kappa, u_0 \in \mathbb{R}$, mit Hilfe der Lösungsformel.

b) Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$ im Falle

i) $\beta = 2$,

ii) $\beta = -1/2$?

Name

Aufgabe 9: **1+4+1 Punkte**

Betrachten Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} u_1' &= 3u_1 + u_2 \\ u_2' &= u_1 + 3u_2 \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie das System in vektorieller Schreibweise $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$.

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung $\mathbf{u}$ des Systems.

c) Finden Sie eine Lösung $\mathbf{u}$ mit $\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Name

Aufgabe 10: **1+3+2 Punkte**

Betrachten Sie folgende gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' + ay' + by = c, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass die konstante Funktion $y(t) = c/b$ eine Lösung von (1) ist.

b) Zeigen Sie: Sind y_1 und y_2 Lösungen der homogenen Gleichung

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2}$$

so ist auch $c_1 y_1 + c_2 y_2$ für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung von (2).

c) Zeigen Sie: ist y_1 Lösung von (2) so ist $y_1 + c/b$ Lösung von (1).