26.07.2016

Dr. Susanne Knies, Behrouz Taji

Klausur

Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2016

- Beachten Sie bitte, dass außer Ihrem handbeschriebenen Blatt keine weiteren Hilfsmittel erlaubt sind!
- Sie müssen die Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten Papier bearbeiten. Falls Ihnen das Papier dabei ausgehen sollte, so können Sie sich jederzeit weiteres Papier geben lassen.
- Bitte benutzen Sie ausschließlich Kugelschreiber, Filzstifte oder Füller in den Farben blau oder schwarz und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie alle Ihre Ergebnisse, zum Beispiel durch eine Rechnung.

Dauer der Klausur: 9:15 bis 11:30 Uhr

Nachname: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Studienfach: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	5	7	6	6	7	4	6
erhaltene Punkte							

Aufgabe	8	9	10
max. Punkte	6	7	6
erhaltene Punkte			

Σ (max. 61)	Note	

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg !!!

Name

Aufgabe 1: **Punkte 1+2+2**

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Was ist ein Kriterium damit A invertierbar ist?

(b) Sei $C = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ -2 & 3/2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie C^{-1}, falls C invertierbar ist.

(c) Sei $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Lösen Sie das inhomogene Gleichungssystem $C\mathbf{x} = \mathbf{b}_i$, für $i = 1, 2$.

Name

Aufgabe 2: **Punkte 3+4**

(a) Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ein linearer Raum ist, für jede Matrix A.

(b) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Geben Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ in parametrisierter Form an. Entscheiden Sie, ob $\mathbb{L}$ einen linearen oder einen affin linearen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ bildet und geben Sie dessen Dimension an.

Name

Aufgabe 3: **Punkte 2+2+2**

Lösen Sie:

(a) $z^2 + 2z + 3 = 0$.

(b) $4z^2 + 2z - 1 = 0$.

(c) $4z^2 - 12z + 9 = 0$.

Name

Aufgabe 4: **2+2+2 Punkte**

(a) Der Vektor $\mathbf{v}$ sei ein Eigenvektor für zwei quadratische Matrizen A und B mit Eigenwerten λ_A und λ_B. Zeigen Sie, dass $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor für das Produkt BA ist. Welches ist der zugehörige Eigenwert?

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Finden Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A, A^{-1} und A^2. (Hinweis: Falls Sie A^{-1} und A^2 nicht berechnen möchten, so können Sie Teil a) verwenden.)

Name

Aufgabe 5: **3+2+2 Punkte**

Seien $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 2i$.

(a) Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$, $z_1 + z_2$ und $\overline{z_1 - z_2}$.

(b) Berechnen Sie $|z_k|$, für $k = 1, 2$.

(c) Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2^{-1}$.

Name

Aufgabe 6: **Punkte 2+2**

(a) Sei $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$. Drücken Sie z in Polarkoordinaten aus.

(b) Berechnen Sie z^{16} und skizzieren Sie z^{16} und z.

Aufgabe 7: **6 Punkte**

Lösen Sie:

$$(1 - t^2)y'(t) = -2t(y - a)$$

für eine Konstante $a \neq 1$, mit $y(0) = 1$. (Tipp: Trennung der Variablen oder ln - Trick.)

Name

Aufgabe 8: **6 Punkte**

Lösen Sie die folgende lineare gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\frac{1}{t}y'(t) - \frac{2}{t^2}y = t\cos(t),$$

für $t \geq \pi/2$, mit $y(\pi/2) = 0$.

Name

Aufgabe 9: **1+2+2+2 Punkte**

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$u' = -(u+2)(u-3).$$

a) Bestimmen Sie die stationären Punkte der Gleichung.

b) Sind die stationären Punkte anziehend stabil oder instabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Skizzieren Sie in dem gegebenen Koordinatensystem das Richtungsfeld für

$$u' = -(u+2)(u-3)$$

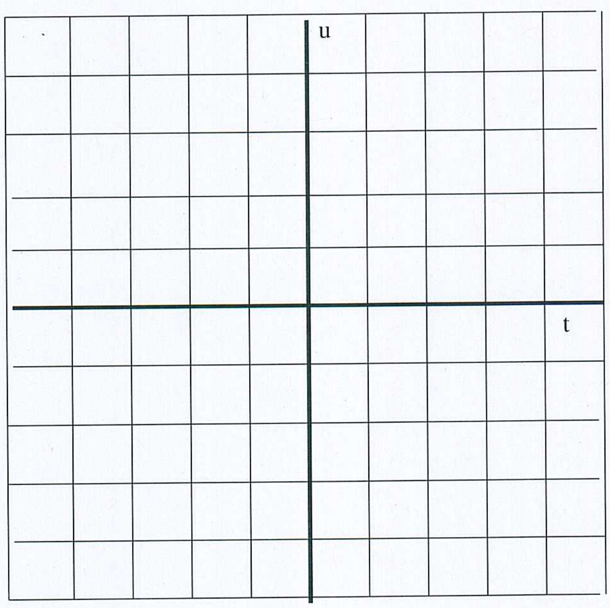
im Bereich $t \in [-2, 2]$.

d) Skizzieren Sie Lösungskurven, welche durch die Punkte

i) $u(0) = 1$

ii) $u(0) = -2$

verlaufen, für $t \in [-2, 2]$.



Name

Aufgabe 10: **3+3 Punkte**

Betrachten Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} u_1' &= 3u_1 + 2u_2 \\ u_2' &= 2u_1 + 3u_2 \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung $\mathbf{u}$ des Systems.

(b) Finden Sie eine Lösung $\mathbf{u}$ mit $\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.