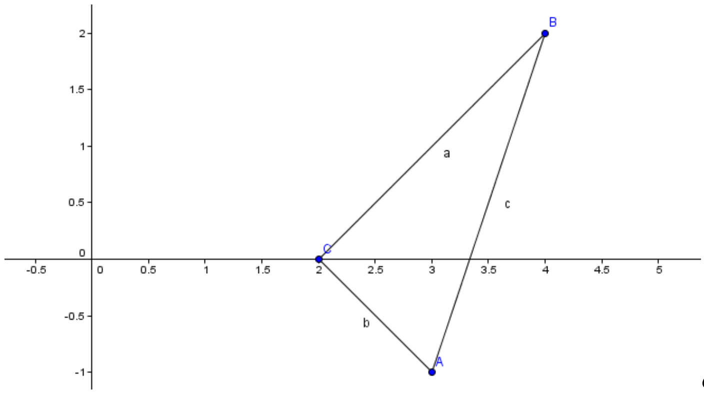
M2 SoSe 14: Klausur

1. Punkte: 5

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in R^2$$

a. A, B, C zeichnen und zu Dreieck verbinden, zeigen das in C ein Winkel von 90 °C herrscht



$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} * \vec{b}}{||\vec{a}|| * ||\vec{b}||}\right) = \arccos\left(\frac{0}{\sqrt{8}\sqrt{2}}\right) = 90°C$$

b. Flächeninhalt und Umfang berechnen

$$U_A = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \sqrt{8} + \sqrt{2} + \sqrt{10} \text{ und } F_A = \frac{||a|| * ||b||}{2} = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{2}}{2}$$

2. Punkte: 6

LGS lösen:

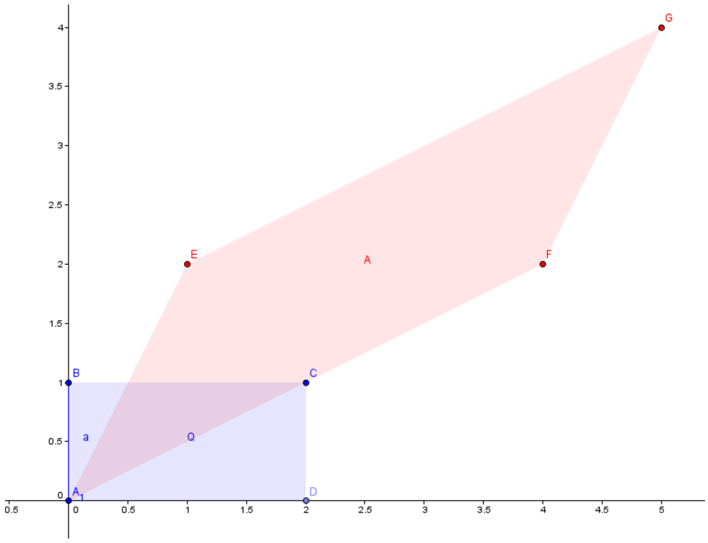
$$-x_1 + x_2 = 4$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$3x_1 + x_2 = 0$$

3. Punkte: 7

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2 \middle| 0 \leq x_1 \leq 2 \; und \; 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}$$

a. Skizze von $Q \; und \; A(Q) = \left\{ A\vec{x} \middle| \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in Q \right\}$ in gegebenes Koordinatensystem

Tipp: Abbildung der Eckpunkte



Eckpunkte von Q: $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b. Flächeninhalt von A(Q) berechnen

4. Punkte: 5

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   a. $\det(A) = 2$

   b. Inverse A^{-1} berechnen, $A\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ lösen und Proberechnung machen

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = A^{-1} * b = A^{-1} * \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Probe: $A\begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. Punkte: 6

   a. in Form $z = x + iy$ bringen

      i. $z = (3 + i)i = -1 + 3i$

      ii. $z = (1 - i)^2 = 2i$

      iii. $z = (2 + 2i)\left(\frac{1}{2} - i\right) = 3 - i$

   b. in Form $z = x + iy$ bringen

      i. $z = \frac{1}{2+2i} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

      ii. $z = \frac{1-i}{1+3i} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

6. Punkte: 7

   a. $z \in C$ so bestimmen, dass $z^2 = i$ stimmt, Proberechnung

      Hinweis: zeichnerisch oder mit Polarkoordinaten lösbar

$$z^2 = r\cos(\varphi) + i\sin(\varphi),$$

$$r_{z^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \text{ und } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ (zeichnerisch)}$$

$$\rightarrow z^2 = 1 * \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i * 1 * \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i$$

$$r_{z^2} = r_z * r_z \rightarrow r_z = \sqrt{r_{z^2}} = 1$$

$$\varphi_{z^2} = \varphi_z + \varphi_z \rightarrow \varphi_z = \frac{\varphi_{z^2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$z^2 = z * z = (r_z)^2[\cos(\varphi_z + \varphi_z) + i\sin(\varphi_z + \varphi_z)]$$

$$\rightarrow z = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}$$

   b. Punkt $z = e^{\frac{3}{4}\pi i}$ gegeben, z^7 berechnen

      Tipp: $e^{2\pi i} = 1$

$$z^7 = \left(1 * e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)^7 = 1^7 * e^{\frac{21}{4}\pi i} \underset{Periode}{=} 1 * e^{\frac{5}{4}\pi i} = \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}$$

7. Punkte: 4

a. Lösung $z \in C$ bestimmen von $4z^2 - 12z + 10 = 0$

$$4z^2 - 12z + 10 = 0 \leftrightarrow z^2 - 3z + \frac{5}{2} = 0 \to z_{1/2} = \frac{3}{2} \pm i\sqrt{\frac{1}{4}}$$

b. $z^2 + az + b = 0 \, mit \; a, b \in R \; (relle \; Koeffizienten)$
zeigen, dass wenn $z \in C$ Lösung ist, auch $\bar{z} \in C$ Lösung ist

$$z_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \to \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b < 0 \leftrightarrow z \in C \leftrightarrow z = x \pm iy$$
$$z_1 = x + iy \, , z_2 = x - iy = \overline{x + \imath y} = \overline{z_1}$$

8. Punkte: 7

lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit reellen Koeffizienten:

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

a. Lösung finden mit Ansatz $y_1(t) = e^{\lambda t}$

$$\to \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \to \lambda_{1/2} = -3 \qquad \to y(t) = e^{-3t} + te^{-3t}$$

b. nachrechnen, dass $y_2(t) = te^{-3t}$ auch Lösung ist

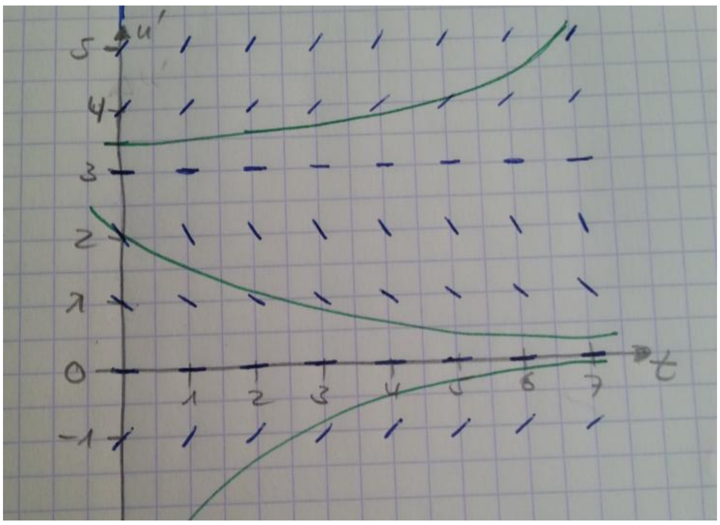
c. allgemeine Lösung der Differentialgleichung: $y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 te^{-3t}$

9. Punkte: 6

$$u' = \frac{1}{3}(u - 3)u$$

a. Richtungsfeld einzeichnen in gegebenes Koordinatensystem, für $u(0) = 1{,}5$ und $u(0) = 3{,}5$ Lösungskurven einzeichnen

t unabhängig!



b. stationäre Punkte und deren Verhalten (instabil oder anziehend stabil) bestimmen

$$u' = g(u) = \frac{4}{3}(u-3) = \frac{1}{3}u^2 - u \rightarrow g'(u) = \frac{2}{3}u - 1$$

$$u' = 0\ f\text{ür}\ u_1 = 3\ und\ u_2 = 0$$

$$g'(u_1) = \frac{2}{3}(3) - 1 = 1 > 0 \rightarrow instabil$$

$$g'(u_2) = \frac{2}{3}(0) - 1 = -1 < 0 \rightarrow anziehend\ stabil$$

10.Punkte: 8

$$u_1' = 4u_1 + 4u_2$$
$$u_2' = u_1 + 4u_2$$

a. in Vektorschreibweise $\vec{u}' = A\vec{u}$

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

b. allgemeine Lösung $\vec{u}$

Eigenwert: $\det(A - \lambda I_4) = 0 \leftrightarrow \lambda_1 = 6\ und\ \lambda_2 = 2$

Eigenvektoren:

$$\lambda_1 : \left[\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 2s \\ s \end{pmatrix}, s \in R$$

$$\lambda_2 : \left[\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} -2t \\ -t \end{pmatrix}, t \in R$$

c. zeigen das $\vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ stimmt