5. Übung für Biologen - Lösung
zur Vorlesung
Physik für Mediziner, Pharmazeuten, Biologen
SS 2006

Aufgabe 1: Stokes: Kugelfallviskosimeter

a) m=0,3 g, v=10 cm/s, r=2 mm, ρ=1,5 g/cm^3.

$$\begin{aligned}
F_R &= 6\pi r\eta v = F_g - F_A \\
\Rightarrow \eta &= \frac{F_g - F_A}{6\pi r v} = \frac{mg - \frac{4}{3}\rho\pi r^3 g}{6\pi r v} \\
&= \frac{0,0003\ kg \cdot 9,81\ m/s^2 - \frac{4}{3}\cdot 1500\ kg/m^3 \cdot \pi \cdot (0,002\ m)^3 \cdot 9,81\ m/s^2}{6\pi \cdot 0,002\ m \cdot 0,1\ m/s} \\
&\approx \underline{\underline{650\ mPa\ s}}.
\end{aligned}$$

b) r=1mm.

$$\begin{aligned}
\rho_{Kugel} &= \frac{m}{\frac{4}{3}\pi\ r^3} \\
&= \frac{0,0003\ kg}{\frac{4}{3}\pi \cdot (0,002\ m)^3} = \underline{\underline{8952\ kg/m^3}}. \\
\Rightarrow v &= \frac{\frac{4}{3}(\rho_{Kugel} - \rho)\ \pi r^3 g}{6\pi r\eta} \\
&= \frac{\frac{4}{3}\cdot(8952 - 1500)\ kg/m^3 \cdot \pi \cdot (0,001\ m)^3 \cdot 9,81\ m/s^2}{6\pi \cdot 0,001\ m \cdot 0,65\ Pa\ s} \\
&= \underline{\underline{0,025\ m/s}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Hagen-Poiseuille: Infusion

a) h=0,8 m, r=0,00025 m, l=0.04 m, V=50 ml, η=1 mPa s.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{V}{t} = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\eta l} \\
\Rightarrow t &= \frac{8V\eta l}{\pi r^4 \Delta p} \\
&= \frac{8 \cdot 50 \cdot 10^{-6} m^3 \cdot 0,001\ Pa\ s \cdot 0,04\ m}{\pi \cdot (0,00025\ m)^4 \cdot 1000\ kg/m^3 \cdot 9,81\ m/s^2 \cdot 0,8m} \\
&= \underline{\underline{166\ s}}.
\end{aligned}$$

b)

$$I = \frac{V}{t} = \bar{v} \cdot A \qquad \begin{aligned}
\Rightarrow \bar{v} &= \frac{V}{t \cdot A} \\
&= \frac{50 \cdot 10^{-6} m^3}{166\ s \cdot \pi \cdot (0,00025\ m)^2} \\
&= \underline{\underline{1,53\ m/s}}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} r^4 &= \frac{8V\eta l}{\pi t \Delta p} \\ &= \frac{8 \cdot 50 \cdot 10^{-6} m^3 \cdot 0,001\ Pa\ s \cdot 0,04\ m}{\pi \cdot 166/2\ s \cdot 1000\ kg/m^3 \cdot 9,81\ m/s^2 \cdot 0,8m} \\ \Rightarrow r &\approx \underline{\underline{0,3\ mm}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Hagen-Poiseuille, Bernoulli & Kirchhoff: Gartenbewässerung

p_A=2 bar=$2 \cdot 10^5$ Pa, l=20 m, r=5 mm, I=0,5 l/s.

a)

$$I = \frac{\pi r^4}{8\eta l}(p_A - p_E)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_E &= p_A - \frac{I \cdot 8\eta l}{\pi r^4} \\ &= 2 \cdot 10^5 Pa - \frac{5 \cdot 10^{-4} m^3/s \cdot 8 \cdot 10^{-3} Pa\ s \cdot 20\ m}{\pi (5 \cdot 10^{-3} m)^4} \\ &\approx 160\,000\ Pa = \underline{\underline{1,6\ bar}}. \end{aligned}$$

b) r_1=5 mm, r_2=1 mm.

$$I = A_1 v_1 \qquad A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad \begin{aligned} \Rightarrow v_2 &= \frac{A_1 v_1}{A_2} = \frac{I}{A_2} \\ &= \frac{5 \cdot 10^{-4} m^3/s}{\pi (0,001\ m)^2} \\ &\approx \underline{\underline{159\ m/s}}. \qquad \text{vgl. } v_1 \approx 6,4\ m/s. \end{aligned}$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad \begin{aligned} \Rightarrow p_2 &= p_1 + \frac{1}{2}\rho (v_1^2 - v_2^2) \\ &= 160\ 000\ Pa + 0,5 \cdot 1000\ kg/m^3 \cdot (6,4^2 - 159^2) m^2/s^2 \\ &\approx \underline{\underline{-125\ bar}}. \end{aligned}$$

Ein negativer Wert des statischen Drucks ist nicht sinnvoll. Hier kann die Strömung in der Düse nicht mehr als laminar und reibungsfrei angesehen werden. Die Annahme eines gleich bleibenden Volumenstroms ist falsch.

Richtig: Statischer Druck am Ende ist 0 bar. Der Volumenstrom ist bestimmt durch die Druckdifferenz zwischen Quelle und Schlauchöffnung (2 bar) und den Strömungswiderstand. Verwendung der abgewandelten Bernoulliformel:

zu a)

$$\begin{aligned} p_L = \frac{1}{2}\rho v^2 + \Delta p_R &= \frac{1}{2}\rho v^2 + I \frac{8\eta l}{\pi r^4} \\ \text{mit } I = v\pi r^2 \text{ folgt} \qquad v^2 &+ \frac{16\eta l}{\rho r^2} v - 2\frac{p_L}{\rho} = 0 \\ \Rightarrow v &= -\frac{8\eta l}{\rho r^2} + \sqrt{\frac{8\eta l}{\rho r^2} + 2\frac{p_L}{\rho}} \\ &= \underline{\underline{14,6\ m/s}} \Rightarrow I = 1,15\ l/s. \end{aligned}$$

zu b) Hier addieren sich die Widerstände von Schlauch und Düse (Düsenlänge l_2=2 mm, die Düsenlänge ändert nur wenig am Ergebnis), mit $I = v_1 A_1 = v_2 A_2$ folgt:

$$\begin{aligned} v_2^2 &+ \frac{16\eta}{\rho}\Big(\frac{l_1 r_2^2}{r_1^4} + \frac{l_2}{r_2^2}\Big) v_2 - 2\frac{p_L}{\rho} = 0 \\ \Rightarrow v_2 &= \underline{\underline{19,7\ m/s}} \Rightarrow v_1 = 0,79\ m/s \quad \text{und} \quad I = v_2 A_2 = 62\ ml/s. \end{aligned}$$

c) r=5mm, l_1=20 m, l_2=l_3=5 m.

$$R = \frac{8\eta l}{\pi r^4} \qquad R_1 = 81,5 \cdot 10^6\ Pa\ s/m^3 \qquad R_2 = R_3 = 20,4 \cdot 10^6\ Pa\ s/m^3$$

$$R_{ges} = R_1 + \frac{1}{1/R_2 + 1/R_3} = \underline{\underline{91,7 \cdot 10^6\ Pa\ s/m^3}}.$$