4. Übung für Biologen - Lösung
zur Vorlesung
Physik für Mediziner, Pharmazeuten, Biologen
SS 2006

Aufgabe 1: Hydrostatischer Druck

a)

$$\begin{aligned} p &= 6\ bar = 6 \cdot 10^5 Pa \\ A &= \pi r^2 = \pi \cdot (4 \cdot 10^{-3} m)^2 \\ \Rightarrow F &= p \cdot A = 6 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 16 \cdot 10^{-6} N = \underline{30.16\ N}. \end{aligned}$$

b)

1. $p = \rho \cdot g \cdot h = 1000\ kg/m^3 \cdot 9.81\ m/s^2 \cdot 600\ m = \underline{5.9 \cdot 10^6 N/m^2}.$

2. $h = \dfrac{p}{\rho \cdot g} = \dfrac{2 \cdot 10^7 N/m^2}{1000\ kg/m^3 \cdot 9.81\ m/s^2} \approx \underline{2038\ m}.$

Aufgabe 2: Impulserhaltung

a) inelastischer Stoß

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= 0 \\ \Rightarrow v &= -\frac{m_2 v_2}{m_1} = \frac{1080\ kg \cdot 1\ km/h}{90\ kg} = \underline{-12\ km/h}. \end{aligned}$$

b) 1. inelastischer Stoß - hinterer Wagen hat Index 1, vorderer Wagen Index 2.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \qquad \Rightarrow \quad v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$v_1 = 2 v_2, \quad m_1 = \frac{1}{2} m_2 \qquad \Rightarrow v = \frac{0.5 m_2 \cdot 2 v_2 + m_2 v_2}{0.5 m_2 + m_2} = \underline{\frac{4}{3} v_2 = \frac{2}{3} v_1}.$$

2. elastischer Stoß

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' && (1) \\ \Rightarrow m_1 (v_1 - v_1') &= m_2 (v_2' - v_2) && (2) \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 && (3) \\ \Rightarrow m_1 (v_1^2 - v_1'^2) &= m_2 (v_2'^2 - v_2^2) \\ \Rightarrow m_1 (v_1 + v_1')(v_1 - v_1') &= m_2 (v_2' + v_2)(v_2' - v_2) && (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4):(2) \qquad v_1 + v_1' &= v_2 + v_2' \\ \Rightarrow v_2' &= v_1 + v_1' - v_2 && (5) \end{aligned}$$

Einsetzen in (1) und Auflösen nach v_1' liefert:

$$v_1' = \frac{2 m_2}{m_1 + m_2}\, v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_1$$

analog findet man $$v_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2}\, v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\, v_2$$

mit $v_1 = 2v_2$, $m_1 = \frac{1}{2}m_2$ folgt:

$$\begin{aligned}
\text{hinterer Wagen} \qquad v_1' &= \frac{2m_1}{3m_1}v_1 - \frac{m_1}{3m_1}v_1 = \underline{\frac{1}{3}v_1} \\
\text{vorderer Wagen} \qquad v_2' &= \frac{2m_2}{3/2m_2}v_2 + \frac{1/2m_2}{3/2m_2}v_2 = \underline{\frac{5}{3}v_2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Vektorrechnung

a) $r_x = 50\ cm,\ v_x = |\vec{v}_L| = 15\ cm/s,\ v_y = |\vec{v}_B| 10\ cm/s.$

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\
r_x &= t \cdot v_x \qquad \Rightarrow \quad t = \frac{r_x}{v_x} = 3\ \frac{2}{3}\ s \\
r_y &= t \cdot v_y = \underline{33\ \frac{2}{3}\ cm}.
\end{aligned}$$

b) $|\vec{v}_L| = 15\ cm/s,\ v_x = |\vec{v}_L| \cdot \cos\alpha,\ v_y = |\vec{v}_L| \cdot \sin\alpha + |\vec{v}_B|.$

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} r_x \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\qquad 0 = v_y = |\vec{v}_L| \cdot \sin\alpha + |\vec{v}_B| \\
\Rightarrow &\qquad \sin\alpha = -\frac{|\vec{v}_B|}{|\vec{v}_L|} \qquad \Rightarrow \alpha \approx \underline{-41.8^\circ} \\
&\qquad t = \frac{r_x}{v_x} = \frac{50\ cm}{15\ cm/s \cdot \cos 41.8^\circ} \approx \underline{4.47\ s}.
\end{aligned}$$

c) $|\sin\alpha| \overset{!}{\leq} 1$

$$\frac{|\vec{v}_B|}{|\vec{v}_L|} \leq 1 \Rightarrow \quad |\vec{v}_B| = |\vec{v}_L|.$$

Für $|\vec{v}_B| = |\vec{v}_L|$ kann er das Weibchen schon nicht mehr auf gleicher Höhe erreichen, da er dann flussaufwärts schwimmen müsste, um die Fließgeschwindigkeit des Baches zu kompensieren. Die x-Komponente seiner Bewegung wäre dann gleich Null.

Aufgabe 4: Integralrechnung

Nur die x-Komponente muß berücksichtigt werden!

$$\begin{aligned}
r(t) &= \int_0^t v_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{T}t'\right) dt' \\
\text{Substitution} &\qquad \tau = \frac{\pi}{T}t' \\
\Rightarrow &\qquad \frac{d\tau}{dt'} = \frac{\pi}{T} \quad \Rightarrow dt' = \frac{T}{\pi}d\tau \\
\text{damit folgt} & \\
r(t) &= \frac{Tv_0}{\pi}\int_0^{\frac{\pi t}{T}} \sin^2(\tau) d\tau = \frac{Tv_0}{\pi} \cdot \frac{1}{2}(\tau - \sin\tau\cos\tau)\Big|_0^{\frac{\pi t}{T}}.
\end{aligned}$$

Für $t = 3\ s$ folgt mit $T = 0.5\ s$ und $v_0 = 15\ cm/s$:

$$r(t = 3\ s) = 1/2 \cdot 15\ cm/s \cdot 3\ s = \underline{22.5\ cm}.$$