Aufgabe 1 – Codierung Aminosäuresequenzen

a) Mittlere Fehlerhäufigkeit Transkription

Gesucht: Ist die Mittlere Fehlerhäufigkeit wenn immer das 3. Codon falsch ist. 8 AS werden immer richtig abgelesen, 13 AS in 50 % der Fälle, 3 AS in 25 % und 1 AS in 75 % der Fälle. Insgesamt gibt es 25 Möglichkeiten.

$$8 \cdot 1 + 13 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,75 = 16$$
$$\frac{16}{25} = 69\,\%$$

Zum Vergleich der Literaturwert = 60 %.

b) Basensequenz

Gegeben	mRNA:	GCU	ACU	AUG	UUC
Gesucht	Polypeptid:	Ala	Thr	Met	Phe

Aufgabe 2 – Geschwindigkeit Kinesin-Motor mit Vesikel

Gegeben: Kraft des Motorproteins $F_{\text{kin}} = 6\,\text{pN} = 6 \times 10^{-12}\,\text{N}$

a) Geschwindigkeit?

Gegeben: ist der Radius eines kugelförmigen Vesikels $r_{\text{V}} = 0.5 \times 10^{-6}\,\text{m}$ und die Viskosität $\eta = 10 \times 10^{-3}\,\text{N}\,\text{m}^{-2}\,\text{s}$. *Gesucht*: Geschwindigkeit ν. Mit den Formeln:

$$F_\gamma = \gamma\,\nu \tag{1}$$
$$\gamma = 6\,\pi\,r\,\eta \tag{2}$$

Erhält man durch Umstellen folgendes Ergebnis:

$$\nu = \frac{F_\gamma}{6\,\pi\,r\,\eta} = 6.4 \times 10^{-4}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$$

b) Wie weit ohne Treibstoff?

Gegeben: ist die Dichte des Vesikels $\delta_{\text{ves}} = 1\,\text{g}\,\text{cm}^{-3}$. Über die Masse m des Vesikels kann die Abbremszeit τ mit folgenden Formeln gefunden werden. Hierbei ist V das Volumen und r der Radius. *Gesucht*: Strecke x welche ohne „Kraftstoff“ zurückgelegt wird.

$$\delta = \frac{m}{V} \tag{3}$$
$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3 \tag{4}$$
$$\tau = \frac{m}{\gamma} \tag{5}$$
$$x = \nu\,\tau \tag{6}$$

Durch einsetzen der Werte aus a) findet man $x = 35 \times 10^{-12}\,\text{m}$.

c) Energie beim Bremsvorgang

Gesucht: kinetische Energie E_{KinV} des Bremsvorgangs des Vesikels.

$$E_{\text{Kin}} = \frac{1}{2}\, m\, \nu^2 \tag{7}$$

Durch einsetzen der Werte erhält man: $E_{\text{KinV}} = 1.1 \times 10^{-22}\,\text{J} = 0.025\,\text{K}_\text{B}\text{T} = 0.001\,\text{ATP}$. Über den Impuls p kann mit

$$p = m\, \nu \tag{8}$$

Die Anzahl der inelastischen Stöße N von H_2O errechnet werden. Der Impuls des H_2O muss doppelt gerechnet werden (Energie beim Aufprall und beim Abstoß). Mit $p_\text{V} = m_\text{V}\, \nu_\text{V} = 2 m_{\text{H}_2\text{O}}\, \nu_{\text{H}_2\text{O}}\, N$, wobei N die Anzahl der Stöße ist, findet man $N \approx 9000$.

Aufgabe 3 – Vergleich Driftgeschwindigkeiten

Gesucht: ν verschiedener Objekte. *Gegeben*: $\eta = 1\,\text{Pa}\,\text{s}^{-1}$ und $F = 1 \times 10^{-12}\,\text{N}$ und ihr Radius r.

Mit Gleichungen (1) und (2) findet man:

	r	v
E. coli	$0.6 \times 10^{-6}\,\text{m}$	$86 \times 10^{-6}\,\text{s}$
Hefe	$2.4 \times 10^{-6}\,\text{m}$	$2.2 \times 10^{-6}\,\text{s}$
Mitochondrium	$1 \times 10^{-6}\,\text{m}$	$50 \times 10^{-6}\,\text{s}$
Vesikel	$25 \times 10^{-9}\,\text{m}$	$2 \times 10^{-3}\,\text{s}$

Aufgabe 4 – Relaxationszeit Protein

Gesucht: Relaxationszeit τ. *Gegeben*: Elastizitätsmodul $E = 1 \times 10^{9}\,\text{Pa}$ und $\eta = 1 \times 10^{-3}\,\text{Pa}\,\text{s}^{-1}$ und die Formel für die Zugspannung $\frac{F}{A} = E\,\frac{x}{L}$, wobei A der Querschnitt ist.

$$F = \kappa\, x \tag{9}$$

$$A = \pi\, r^2 \tag{10}$$

$$\tau = \frac{\gamma}{\kappa} \tag{11}$$

Mit dem Hook'schen Gesetz und der Kreisfläche A, wobei der Radius $r = \frac{1}{2}L$ ist, kommt man zu $\kappa\, x = A\, E\frac{x}{L} \iff \kappa = \pi\left(\frac{L^2}{4}\right) E\,\frac{1}{L}$ und mit der Annahme $\frac{\pi}{4} \approx 1$ schließlich zu $\kappa = E\, L$. Nun erhält man $\tau = \frac{\gamma}{\kappa} = \frac{6\pi\,\eta\,\frac{L}{2}}{E\,L} = 10 \times 10^{-12}\,\text{s}$.

Aufgabe 5 – Bewegung Motorprotein

Differentialgleichung für Auslenkung x bei Kelvin-Elementen:

$$F = m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \kappa x \tag{12}$$

a) Elastizität spielt keine Rolle

Gesucht: γ, *Gegeben*: $\kappa = 0$, Kraft $F_0 = 2.5 \times 10^{-12}\,\mathrm{N}$, Geschwindigkeit $\nu(t) = 250 \times 10^{-9}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ zur Zeit $t = 3 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$ und die Abbremszeit $\tau = 2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$.

$$v(t) = \frac{F_0}{\gamma}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \tag{13}$$

$$\tau = \frac{m}{\gamma} \tag{14}$$

Durch Umstellen $\gamma = 7.8 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$.

b) Masse spielt keine Rolle

Gesucht: t, *Gegeben*: $m = 0$, $F_0 = 2.5 \times 10^{-12}\,\mathrm{M}$, $\tau = 8 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$ und $\frac{F_0}{\kappa} = \Delta x_{\mathrm{max}}$. Die Auslenkung zur Zeit t ist $x(t) = \Delta x_{\mathrm{max}}\frac{2}{3}$.

$$x(t) = \frac{F_0}{\kappa}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \tag{15}$$

$$\tau = \frac{\gamma}{\kappa} \tag{16}$$

Dies erlaubt die Annahme $1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{2}{3}$, daraus folgt $t = 8.8 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$.

c) Viskosität spielt keine Rolle

Verifizieren von Gleichung (12) für $\gamma = 0$.

$$x(t) = \frac{F}{\kappa}\left(1 - \cos\left(\omega t\right)\right) \tag{17}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \tag{18}$$

Durch Ableiten erhält man $\dot{x}(t) = \frac{F}{\kappa}\omega \sin\left(\omega t\right)$ und $\ddot{x}(t) = \frac{F}{\kappa}\omega^2 \cos\left(\omega t\right)$. Durch einsetzen verifiziert man mit $F = F_0$.

Aufgabe 6 – Proteinkette

Gegeben: Gesamtstreckung $\Delta x_{\mathrm{tot}} = 12 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}$, $F = 18 \times 10^{-12}\,\mathrm{N}$

a) Federkonstante Kette

Gesucht: κ_{tot}. Durch Einsetzen in Gleichung (9) und Umstellen: $\kappa_{\mathrm{tot}} = 1.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{N\,m^{-1}}$

b) Streckung Protein 1

Gesucht: Δx_1. *Gegeben*: $\kappa_1 = 2 \times 10^{-3}\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. Durch Einsetzen in Gleichung (9) und Umstellen: $\Delta x_1 = 9 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}$.

c) Federkonstante Protein 2

Gesucht: κ_2. Bei Reihenschaltung inverse Addition von κ.

$$\frac{1}{\kappa_{\text{tot}}} = \sum \frac{1}{\kappa_{\text{i}}} \tag{19}$$

Daraus folgt $\kappa_2 = 6 \times 10^{-3}\,\text{N}\,\text{m}^{-1}$.

d) Streckung Protein 3

$\Delta x_2 = \Delta x_{\text{tot}} - \Delta x_1 = 3 \times 10^{-9}\,\text{m}$

Aufgabe 7 – Verformung einer Zelle

Modell einer Zelle als Reihe von zwei Kelvin Elementen für den Kern N und das Zytoskelett C. Zug nur in x Richtung. *Gesucht*: κ_N, γN. *Gegeben*: $F_1 = 10 \times 10^{-12}\,\text{N}$, $\Delta x_{\text{tot}} = 1 \times 10^{-6}\,\text{m}$. Mit Gleichung (9) kann $\kappa_{\text{tot}} = 1 \times 10^{-5}\,\text{N}\,\text{m}^{-1}$ berechnet werden.

a) Allgemein

Für eine Reihe an Kelvin-Elementen gilt:

$$F_{\text{tot}} = F_1 = F_2 = \ldots \tag{20}$$

$$\Delta x_{\text{tot}}(t) = F \sum \frac{1}{\kappa_{\text{i}}} \left(1 - \exp\left(-\frac{\kappa_{\text{i}}}{\gamma_{\text{i}} t}\right)\right) \tag{21}$$

Die zweite Gleichung ist der zeitabhängige Ausdruck für Δx.

b) Zeitunabhängig

Gesucht: Δx_N, κ_N. *Gegeben*: $F_2 = 25 \times 10^{-12}\,\text{N}$ und die Streckung des Zytoskeletts $\Delta x_C = 2 \times 10^{-6}\,\text{m}$.

Mit Gleichung (9) kann $\kappa_C = 1.25 \times 10^{-5}\,\text{N}\,\text{m}^{-1}$ berechnet werden. Und schließlich durch inverse Addition gemäß Gleichung (19) wird $\kappa_N = 5 \times 10^{-5}\,\text{N}\,\text{m}^{-1}$ gefunden. Wiederum mit Gleichung (9) erhält man $\Delta x_N = 0.5 \times 10^{-6}\,\text{m}$.

c) Reibung

Gesucht: Verhältnis von γ_N und γ_C. *Gegeben*: Ist die Beziehung $\Delta x_N(t_1) = \frac{1}{2}\Delta x_{N\,\text{max}}$. Bei N_{max} geht $t \to \infty$, Reibung spielt keine Rolle. Es ergibt sich

$$\frac{F}{\kappa_N}\left(1 - \exp\left(-\frac{\kappa_N}{\gamma_N t_1}\right)\right) = \frac{1}{2}\frac{F}{\kappa_N} \iff \gamma_N = \frac{\kappa_N\, t_1}{\ln 2}$$

Für eine Reihe aus Kelvinelementen sind die Kräfte immer gleich, Gleichung (20), also gilt hier nach Gleichung (9) das $\kappa_N\, x_N(t) = \kappa_C\, x_C(t)$. Durch einsetzen von Gleichung (21) und kürzen wird das Verhältnis gefunden.

$$\frac{\kappa_n}{\gamma_N} = \frac{\kappa_C}{\gamma_C} \iff \gamma_N = 4\gamma_C$$

Aufgabe – 8 Verformung Membranstruktur

Eigentlich ziemlich dämliche Aufgabe, wo man nur einsetzen muss. Der Vollständigkeit halber. Die Formel für Volumen Elipsoid $V_\mathrm{E} = \frac{4}{3}\pi\, a\, b\, c$ und Oberfläche des selben $A_\mathrm{E} \approx 4\pi \left[\frac{1}{3}\left((ab)^{\frac{8}{5}} + (ac)^{\frac{8}{5}} + (bc)^{\frac{8}{5}}\right)\right]^{\frac{5}{8}}$ Ausserdem benötigt man die Formel für ein Kugelvolumen (4) und die Formel für eine Kugeloberfläche $A_\mathrm{K} = 4\pi r^2$.

a) Durchmesser Elipsoid

Gesucht: c. *Gegeben*: $a = b = 0.8r = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$. Da in diesem Fall $V_\mathrm{K} = V_\mathrm{E}$ ergibt sich $r = 1.25 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$ und $c = 1.95 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$

b) Verformungsarbeit

Gesucht: Größenverhältnis der beiden Vesikel, mehr Arbeit für das elipsoide. *Gegeben*: Verformungsarbeit $G_\mathrm{Verf,K} = K\,A = 400\,\mathrm{k_Bt}$. Aus $\frac{A_\mathrm{E}}{A_\mathrm{K}} = 1,07$ ergibt sich das Größenverhältnis. Für die Mehrarbeit rechnet man:

$$\frac{G_\mathrm{Verf,E}}{G_\mathrm{Verf,K}} = \frac{K A_\mathrm{E}}{K A_\mathrm{K}} \iff G_\mathrm{Verf,E} = 428\,\mathrm{k_Bt}$$

Aufgabe 9 – AC und MSD

$$\mathrm{AC}(\tau) = \langle x(t) \cdot x(t+\tau) \rangle = \frac{1}{N}\sum_t x_t \cdot x_{t+\tau} \tag{22}$$

$$\mathrm{MSD}(\tau) = \langle (x(t) - x(t+\tau))^2 \rangle = \frac{1}{N}\sum_t (x_t - x_{t+\tau})^2 \tag{23}$$

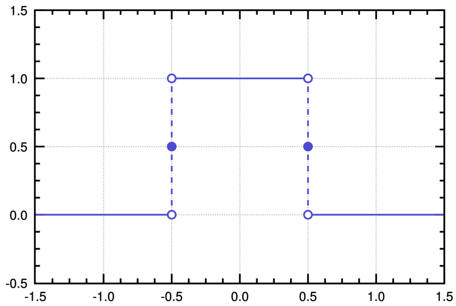
$x(t_a)$	$\mathrm{AC}(\tau_\mathrm{a})$	$\mathrm{MSD}(\tau_\mathrm{a})$	$x(t_b)$	$\mathrm{AC}(\tau_\mathrm{b})$	$\mathrm{MSD}(\tau_\mathrm{b})$	$x(t_c)$	$\mathrm{AC}(\tau_\mathrm{c})$	$\mathrm{MSD}(\tau_\mathrm{c})$
5	25,0	0	8	25,5	0,0	5	25,5	0,0
5	21,9	0	7	21,0	0,9	2	15,9	14,1
5	18,8	0	6	16,6	3,0	7	18,4	7,1
5	15,6	0	5	12,5	5,6	3	13,5	7,6
5	12,5	0	4	8,8	8,0	8	8,9	7,8
5	9,4	0	3	5,5	9,4	6	7,5	1,4
5	6,3	0	2	2,9	9,0	1	1,6	2,5
5	3,1	0	1	1,0	6,1	4	2,5	0,1

Aufgabe 10 – Rechteckfunktion, Deltafunktion, Faltung

Eine Rechteckfunktion kann verschieden Definiert werden. Anschaulich für eine Rechteckfunktion $\mathrm{rect}(t)$, die zwischen $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ den Wert $\mathrm{rect}(t) = 1$ hat und ansonsten $\mathrm{rect}(t) = 0$ ist:

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |t| = \frac{1}{2} \\ 1 & |t| < \frac{1}{2} \end{cases} \tag{24}$$

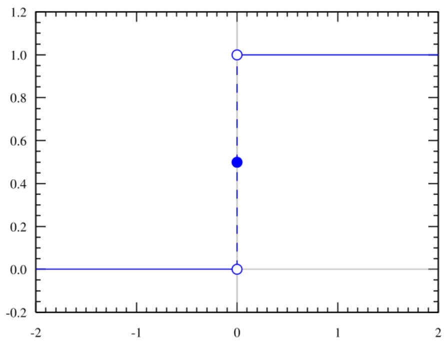
Hier ist eine solche Rechteckfunktion zu sehen:



Eine andere Variante führt über Heaviside Funktion, eine Funktion die für negative Werte $\Theta(x) = 0$ und für Null und positive Werte $\Theta(x) = 1$ ist. Sie ist wie folgt definiert:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geqq 0 \end{cases} \tag{25}$$

Diese Funktion ist hier zu sehen:



Dieselbe Rechteckfunktion wie oben lässt sich nun wie folgt definieren:

$$\mathrm{rect}(t) = \Theta(t + \frac{1}{2}) \cdot \Theta(\frac{1}{2} - t) = \Theta(t + \frac{1}{2}) - \Theta(t - \frac{1}{2}) \tag{26}$$

Eine Deltafunktion ist eine Funktion, die nur einen Wert hat, in unserem Fall, an einer Stelle den Wert 1 hat und ansonsten 0 ist. Sie ist hier wie folgt definiert:

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = a \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} \tag{27}$$

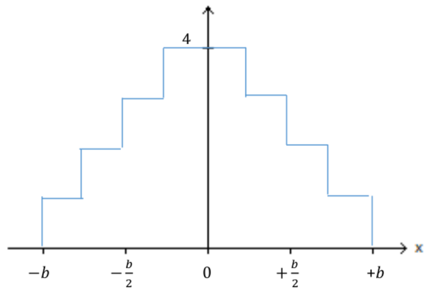
Die Formel für die Faltung einer Funktion mit einer Delta-Funktion ist:

$$\delta(x - x_0) * f(x) = f(x - x_0)$$

Nun soll die (Delta)-Funktion $f(x) = \delta\left(x - \frac{b}{2}\right) + \delta\left(x - \frac{b}{4}\right) + \delta(x) + \delta\left(x + \frac{b}{4}\right) + \delta\left(x + \frac{b}{2}\right)$ mit der Rechteckfunktion $g(x) = \Theta\left(\frac{x}{b} + \frac{1}{2}\right) \cdot \Theta\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{b}\right)$ gefaltet werden. Gemäß der obigen Gleichung setzt man nun die Werte der Delta-Funktion in die x der Rechteckfunktion ein. Man bildet eine Rechteckfunktion um jede Deltafunktion oder so.

$$
\begin{aligned}
f(x) * g(x) = \Theta\left(\frac{x-\frac{b}{2}}{b}+\frac{1}{2}\right)\cdot\Theta\left(\frac{1}{2}-\frac{x-\frac{b}{2}}{b}\right)+\Theta\left(\frac{x-\frac{b}{4}}{b}+\frac{1}{2}\right)\cdot\Theta\left(\frac{1}{2}-\frac{x-\frac{b}{4}}{b}\right)\\
+\Theta\left(\frac{x}{b}+\frac{1}{2}\right)\cdot\Theta\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{b}\right)+\Theta\left(\frac{x+\frac{b}{4}}{b}+\frac{1}{2}\right)\cdot\Theta\left(\frac{1}{2}-\frac{x+\frac{b}{4}}{b}\right)\\
+\Theta\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{b}+\frac{1}{2}\right)\cdot\Theta\left(\frac{1}{2}-\frac{x+\frac{b}{2}}{b}\right)
\end{aligned}
$$

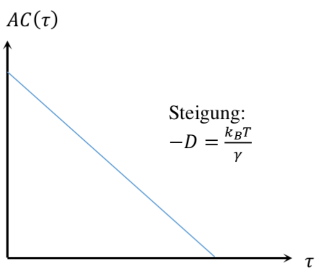
Graphisch dargestellt sieht das dann so aus:

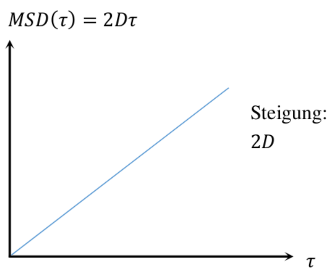


Wenn die Dichte der δ-Peaks immer größer wird nähert man sich einer Dreiecksfunktion immer weiter an.

Aufgabe 11 – Freie Diffusion

a) Skizzen





b) Diffusionskoeffizient

Gesucht: Diffusionskoeffizient D. *Gegeben*: $\mathrm{MSD} = \tau \cdot 4.9 \times 10^{-13}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$. Mit der Einsteinbeziehung:

$$\mathrm{MSD}(\tau) = 2D\tau \tag{28}$$

Einsetzen ergibt $D = 2.4 \times 10^{-13}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$.

c) Durchmesser

Gesucht: Durchmesser a des Latexpartikels. *Gegeben*: Viskosität η. Über den Reibungsfaktor γ findet man den Durchmesser $a = 2r$. Man benötigt Gleichung (2): $\gamma = 6\,\pi\,r\,\eta$ und die Einstein-Smoluchowski

Relation.

$$D = \frac{k_\mathrm{B}T}{\gamma} \tag{29}$$

Er ist $a = 1.8 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$.

d) Abbremszeit

Gesucht: Abbremszeit τ. *Gegeben*: Temperatur $T = 294\,\mathrm{K}$, Dichte $\delta = 1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. Man verwendet hier Gleichung (3)–(5). Also $V_\mathrm{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3$; $\delta = \frac{m}{V}$ und $\tau = \frac{m}{\gamma}$. Es ergibt sich $\tau = 1.7 \times 10^{-7}\,\mathrm{s}$.

e) Diffusion

Gesucht: Zeit t um Rand zu erreichen. *Gegeben*: Strecke $x = 5 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$. Hier Gleichung (28), in der Form $\langle x^2 \rangle = 2Dt$. Man findet $t = 51.2\,\mathrm{s}$

Aufgabe 12 – Potential aus Boltzmannverteilung

Gegeben: Größe des Vesikels $l = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$, $\gamma = 1 \times 10^{-8}\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$, $T = 300\,\mathrm{K}$ und $\kappa = 1 \times 10^{-5}\,\mathrm{N\,m}$.

a) Fläche

Gesucht: Kreisfläche A die abdiffundiert wird, im Gleichgewicht, $\tau \to \infty$. Zum Lösen Gleichverteilungssatz.

$$\langle W(x) \rangle = \frac{1}{2}\langle x^2 \rangle \kappa = \frac{1}{2} k_\mathrm{B}T \tag{30}$$

Zusammen mit Kreisfläche (10) ergibt sich $A = \pi \frac{k_\mathrm{B}T}{\kappa} = 1.3 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}^2$.

b) Kraft und Energie

Gesucht: Kraft F und Energie W. *Gegeben*: Auslenkung aus Potential $x = 5 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$. Die Gleichung (9) für die Federkraft $F(x) = \kappa x$ ergibt Integriert die Formel für die potentielle Energie $W(x)$, welche in thermische Energieeinheiten umgewandelt werden kann.

$$W(x) = \frac{1}{2}\kappa x^2 \tag{31}$$

$$1\,k_\mathrm{B}T \approx 4 \times 10^{-21}\,\mathrm{J} \tag{32}$$

Es ist eine Kraft von $F(x) = 5 \times 10^{-12}\,\mathrm{N}$ nötig, dabei wird eine Energie von $W(x) = 1.3 \times 10^{-18}\,\mathrm{J} = 313\,k_\mathrm{B}T$ verbraucht.

Aufgabe 13 – 15

Irgendwie komisch.

Aufgabe 16 – Diffusion im Potential

Gesucht: Der Radius r des diffundierenden Partikels. *Gegeben*: $T = 300\,\mathrm{K}$, die Viskosität $\eta = 0.85\,\mathrm{m\,Pa\,s}$. Weiterhin $\mathrm{MSD}(\tau \to \infty) = (1 \times 10^{-7}\,\mathrm{m})^2$ und $\mathrm{MSD}(\tau = 1 \times 10^{-2}\,\mathrm{s}) = 1 - \frac{1}{e} \cdot \mathrm{MSD}(\tau \to \infty)$. Allgemein gilt (Skript):

$$\langle x^2 \rangle = \mathrm{MSD}(x(t)) = \frac{2k_\mathrm{B}T}{\kappa}\left(1 - \exp\left(-\frac{\kappa}{\gamma}\tau\right)\right) \tag{33}$$

Für $\tau \to \infty$ ergibt sich $\exp \to 0$ also:

$$\mathrm{MSD}(\tau \to \infty) = \frac{2k_\mathrm{B}T}{\kappa} \tag{34}$$

Mit diesen Gleichungen und $\mathrm{MSD}(\tau = 1 \times 10^{-2}\,\mathrm{s}) = 1 - \frac{1}{e} \cdot \mathrm{MSD}(\tau \to \infty)$ ergibt sich:

$$1 - \frac{1}{e} = 1 - \exp(-1) = 1 - \exp\left(-\frac{\kappa}{\gamma}\tau\right) \iff 1 = \frac{\tau_1 \kappa}{\gamma} \iff \gamma = \tau_1 \kappa$$

Aus Gleichung (2) $\gamma = 6\pi r \eta$ und aus Gleichung (34) $\kappa = \frac{2k_\mathrm{B}T}{\mathrm{MSD}(\tau\to\infty)}$ ergibt sich $r = \tau_1 \frac{2k_\mathrm{B}T}{\mathrm{MSD}(\tau\to\infty)} \frac{1}{6\pi\eta} = 5.3 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$.

Aufgabe 17 – Diffusion bistabiles Potential

Gegeben: Größe des Vesikels $x = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$, Reibungsfaktor $\gamma = 1 \times 10^{-8}\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$, Temperatur $T = 300\,\mathrm{K}$.

a) Autokorrelationszeit

Gesucht: die Autokorrelationszeit τ_0. *Gegeben*: Kraftkonstante $\kappa = 1 \times 10^{-5}\,\mathrm{N\,m}$.

$$\tau_0 = \frac{\gamma}{\kappa} \tag{35}$$

Es ergibt sich $\tau_0 = 1 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$

b) Fläche

Gesucht: Kreisfläche A welche das Vesikel in $t \to \infty$ abdiffundiert. Hier kann in einem harmonischem Potential der Gleichverteilungssatz (30) verwendet werden. Zusammen mit Gleichung (10) für die Kreisfläche ergibt sich $A = \pi \frac{k_\mathrm{B}T}{\kappa} = 1.3 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$.

c) Kraft und Energie

Gesucht: Kraft F der Auslenkung und benötigte Energie W in $k_\mathrm{B}T$. *Gegeben*: Auslenkung aus Potentialzentrum $x = 5 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$. Die Gleichung (9) für die Federkraft $F(x) = \kappa x$ ergibt Integriert die Formel (31) für die potentielle Energie $W(x)$, welche mit Gleichung (32) in thermische Energieeinheiten umgewandelt werden kann. Es ergibt sich eine Energie von $W(x) = 312\,k_\mathrm{B}T$.

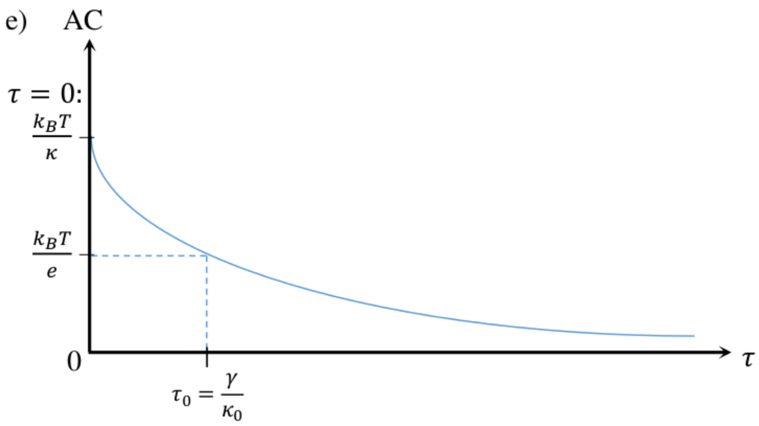
d) Krümmung eines Potentials

Gesucht: Krümmung κ_0 des verlassenen Potentials. *Gegeben*: Durchschnittliche „escape time“ $\tau = 30\,\mathrm{s}$, Energieverbrauch dabei $\Delta W = 3.6 \times 10^{-20}\,\mathrm{J}$. Hierbei wird die Formel von Kramer verwendet.

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{\Delta W}{k_\mathrm{B}T}\right) \tag{36}$$

Setzt man Gleichung (35) ein und stellt um, erhält man $\kappa = 2 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,m^{-1}}$.

e) Autokorrelationsfunktion



$$\mathrm{AC}(x(\tau)) = \frac{k_\mathrm{B}T}{\kappa} \exp\left(-\frac{\tau\kappa}{\gamma}\right) \tag{37}$$

f) Doppelmuldenpotential

Allgemein gilt für die Diffusion eines Teilchens von einem Potentialtopf A mit Krümmung κ_0 zum nächsten Potentialtopf B über ein „Potentialprofil" der Höhe ΔW und einer negativen Krümmung κ_1 die Kramer-Übergangsrate:

$$r_\kappa = \frac{\sqrt{\kappa_0|\kappa_1|}}{2\pi\gamma} \exp\left(-\frac{\Delta W}{k_\mathrm{B}T}\right) \tag{38}$$

Wenn eine konstante äußere Kraft F_0 anliegt, erhöht sich ΔW um $F_0 d$ bzw. verringert sich um $F_0(s-d)$. Dabei ist s der Abstand zwischen den Potentialminima.

$$r_{A\to B} = \frac{\sqrt{\kappa_0|\kappa_1|}}{2\pi\gamma} \exp\left(-\frac{\Delta W + F_0 d}{k_\mathrm{B}T}\right) \quad \text{bzw.} \quad r_{b\to A} = \frac{\sqrt{\kappa_0|\kappa_1|}}{2\pi\gamma} \exp\left(-\frac{\Delta W - F_0(s-d)}{k_\mathrm{B}T}\right) \tag{39}$$

Hier ist das Verhältnis zwischen den Raten mit einem Abstand der Potentialminima von $2d$ bei Anlegen einer äußeren Kraft gesucht.

$$r_1 = \frac{\sqrt{\kappa_0|\kappa_1|}}{2\pi\gamma} \exp\left(-\frac{\Delta W + F_0 d}{k_\mathrm{B}T}\right) \quad \text{und} \quad r_2 = \frac{\sqrt{\kappa_0|\kappa_1|}}{2\pi\gamma} \exp\left(-\frac{\Delta W - F_0 d}{k_\mathrm{B}T}\right)$$

führt zu der Rate: $$\frac{r_1}{r_2} = \exp\left(-\frac{2F_0 d}{k_\mathrm{B}T}\right)$$

Aufgabe 18 – Mikroskopie-Abbildung

Gegeben: Numerische Apertur des Mikroskops NA $= 1.2$, $\lambda = 0.5 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$, Maschenweite des Bildes $s = 0.5 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$, und angenommen $n = 1$.

$$\mathrm{NA} = \mathrm{n}\sin(\alpha) \tag{40}$$

Es ergibt sich $\alpha = 64.5°$

a) Auflösung

Gesucht: Kann Bild aufgelöst werden? Rayleigh Kriterium:

$$\Delta x = \frac{0.61 \cdot \lambda}{n \sin(\alpha)} = \frac{1.22 \cdot \lambda}{2\mathrm{NA}} \tag{41}$$

Es ergibt sich $\Delta x = 0.25 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$, da $\Delta x < s$ kann das Bild Aufgelöst werden.

b) Tiefenschärfe

Gesucht: Maximales Abblenden (minimale NA), Anzahl der Maschen die dann noch axial zu sehen sind. Für $\Delta x' = 0.5 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$ ergibt sich $\mathrm{NA}' = 0.61$ und $\alpha = 27.3°$. Für Tiefenschärfe (axiale Auflösung):

$$\Delta z = \frac{\lambda}{n - n\cos(\alpha)} = \frac{0.9 \cdot n\lambda}{\mathrm{NA}^2} \tag{42}$$

Meiner Ansicht nach (Lösung in Übung anders) findet man $\Delta z = 1.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$ was bedeuten würde $\Delta z > s$, also keine Masche wird axial aufgelöst.

Aufgabe 19 – FRAP eines diffundierenden Proteins

a) Wie groß ist das Rezeptorprotein (kugelförmig)?

Gesucht wird der Radius der Rezeptorproteins r_{RP}. *Gegeben* sind die Halbwertszeit der Fluoreszenz-Intensität $\tau_{\mathrm{D}} = 4.5\,\mathrm{s}$, der Korrekturfaktor $\beta = 0.88$, die Viskosität $\eta = 0.5\,\mathrm{N\,s\,m^{-2}}$ und der Radius der bestrahlten Fläche $r_{\mathrm{B}} = 1\,\mu\mathrm{m}$. Folgende Formeln werden benötigt:

$$\tau_{\mathrm{D}} = \frac{r_{\mathrm{B}}^2 \beta}{4\mathrm{D}} \tag{43}$$

Mit Gleichung (28) und (2) erhält man durch Einsetzen und Umstellen:

$$r_{\mathrm{RP}} = \frac{2}{3\pi} \frac{\tau_{\mathrm{D}}\, k_{\mathrm{B}} T}{r_{\mathrm{B}}^2\, \beta\, \eta} = 8.8\,\mathrm{nm}$$

b) Wie groß ist das Rezeptorprotein (zylinderförmig)?

Gesucht wird der Radius der Rezeptorproteins r_{RPzyl}. Eigentlich genau das Gleiche nur mit einer anderen (auf dem Blatt gegebenen) Formel für den Reibungsfaktor γ_{Zyl}.

$$\gamma_{\mathrm{Zyl}} = \frac{4\pi\, \eta\, L}{\ln\left(\frac{L}{2 r_{\mathrm{RPzyl}}}\right) + 0.84}$$

$L = 5 \times 10^{-9}$ m entspricht der Dicke der Membran. Durch Einsetzen und Umstellen:

$$\tau_{\mathrm{D}} = \frac{r_{\mathrm{B}}^2\, \beta\, \pi\, \eta\, L}{k_{\mathrm{B}} T \left(\ln \left(\frac{L}{2 r_{\mathrm{RPzyl}}} \right) + 0.84 \right)} \iff \ln \left(\frac{L}{2 r_{\mathrm{RPzyl}}} \right) = \frac{r_{\mathrm{B}}^2\, \beta\, \pi\, \eta\, L}{k_{\mathrm{B}} T\, \tau_{\mathrm{D}}} - 0.84$$

Nun substituiert man $\alpha = \frac{r_{\mathrm{B}}^2\, \beta\, \pi\, \eta\, L}{k_{\mathrm{B}} T\, \tau_{\mathrm{D}}}$ und erhebt beide Seiten zur Potenz von e.

$$\frac{L}{2 r_{\mathrm{RPzyl}}} = \exp(\alpha - 0.84) \iff r_{\mathrm{RPzyl}} = \frac{L}{2} \exp(0.84 - \alpha) = 4\,\mathrm{nm}$$

Aufgabe 20 – FRET

a) mittlere Fluoreszentemissionsrate?

Gesucht ist die mittlere Fluoreszentemissionsrate k_{f}. Das Fluorophor wird $N = 1 \times 10^6$ mal in $\Delta t = 50\,\mathrm{ms}$ angeregt bevor es zerfällt. Daraus ergibt sich die Rate $k_{\mathrm{ges}} = \frac{N}{\Delta t}$ für den Energieverlust. Die Rate für den strahlungslosen Energieverlust $k_{\mathrm{nr}} = \frac{1}{20} k_{\mathrm{ges}}$ wird von ersterer abgezogen.

$$k_{\mathrm{ges}} = k_{\mathrm{f}} + k_{\mathrm{nr}} \tag{44}$$

$$k_{\mathrm{f}} = k_{\mathrm{ges}} - \frac{1}{20} k_{\mathrm{ges}} = 1.9 \times 10^7\,\mathrm{s}^{-1}$$

b) Donor und Akzeptor Abstand

Gegeben: Effizienz des Energietransfers von Donor zu Akzeptor $Q(r) = 0.7$ und Förster-Radius $R_0 = 8 \times 10^{-9}$ m. *Gesucht*: Abstand der Fluorophore r. Dabei ist I_{DA} die Intensität des Donors in Anwesenheit des Akzeptors, im Gegensatz zu jener des Donors allein I_{D}.

$$Q(r) = \frac{R_0^6}{R_0^6 + r^6} \tag{45}$$

Durch Umstellen $r = \frac{R_0}{\sqrt[6]{Q(r)}} - R_0 = 0.49 \times 10^{-9}$ m

c) Absorbtionsrate des Akzeptors

Gesucht: Absorbtionsrate k_{A} des Akzeptors bei dieser Entfernung.

$$1 - Q(r) = \frac{r^6}{R_0 + r^6} = \frac{I_{\mathrm{D}} - I_{\mathrm{DA}}}{I_{\mathrm{D}}} = \frac{k_{\mathrm{A}}}{k_{\mathrm{ges}} + k_{\mathrm{A}}} \tag{46}$$

Durch Umstellen $k_{\mathrm{A}} = \frac{k_{\mathrm{ges}} - Q k_{\mathrm{ges}}}{Q} = 8.1 \times 10^6\,\mathrm{s}^{-1}$.

Aufgabe 21 – Axiales Video-tracking

Gegeben: Größe Bead $l = 50 \times 10^{-9}$ m, $\lambda = 5 \times 10^{-5}$ m, NA = 1.2, $n_{\mathrm{H_2O}} = 1.33$, Vergrößerung M = 60, 1400×1050 Pixel, $dx = 51$ Pixel, $dy = 37$ Pixel, Diagonale des Bildschirms $\frac{1}{2}$ Zoll

a) Distanz

Gesucht: dx und dy in m. Verhältnis der Seiten $\frac{a}{b} = \frac{1400}{1050} = \frac{4x}{3x}$, Diagonale des Bildschirms $c = \frac{1}{2}$ Zoll $=$ 1.27×10^{-2} m. Mit Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{47}$$

findet man $c = \sqrt{9x^2 + 16x^2} = 5x$ und $x = \frac{1.27 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}}{5} = 2.5 \times 10^{-3}$ m. Somit ist Seite $X =$ 1400 Pixel $= 1.0 \times 10^{-2}$ m und Seite $Y = 1050$ Pixel $= 7.5 \times 10^{-3}$ m. Als Größe für 1 Pixel ergibt sich $7.1 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$. Um die Bildposition b' in die Objektposition b mit der Vergrößerung M umzurechnen:

$$b = \frac{b'}{M} \tag{48}$$

Daraus $dx = 6.0 \times 10^{-6}$ m und $dy = 4.37 \times 10^{-6}$ m.

b) Skizzen

Gegeben:

t	σ_{xy}	I
0	$\sigma_{xy}(t=0)$	$I_{\max}$
$\frac{T}{2}$	$3 \times \sigma_{xy}(t=0)$	0
T	$1.5 \times \sigma_{xy}(t=\frac{T}{2})$	?

Hierbei ist σ_{xy} die Standardabweichung, welche hier die Veränderung der Größe des Bildes beschreibt. Man fertigt Skizze des Bildes an. Von $t = 0$ im Ursprung diffundiert es zu der Position bei $t = T$. Dabei wird es 4.5 mal Größer. Bei einem Schaubild der Intensitäten ist der Abstand zwischen dem Maximum und der Nullstelle Δz. Da bei $t = 0$ die Intensität $I = I_{\max}$ und bei $t = \frac{T}{2}$ die Intensität $I = 0$, ist es in dieser Zeit um Δz gewandert.

c) Axiale Auflösung

Gesucht: Kalibrationsfaktor g_z. Gleichung gegeben; Δz, die axiale Auflösung, mit Gleichung (42).

$$g_z = \frac{\Delta\sigma}{\Delta z} = \frac{\sigma_{xy}(t=\frac{T}{2}) - \sigma_{xy}(t=0)}{\frac{\lambda}{n - n\cos(\alpha)}} = \frac{3 \times \sigma_{xy}(t=0) - \sigma_{xy}(t=0)}{660 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}} = \frac{\sigma_{xy}(t=0)}{330 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}}$$

Gesucht: axiale Distanz. Es besteht Linearer Zusammenhang zwischen σ und z.

$$\sigma(t) = g_z \cdot z(t) + \sigma_{xy}(t=0)$$

Daraus ergibt sich für $z(t=T)$

$$z(t=T) = \frac{\sigma_{xy}(t=T) - \sigma_{xy}(t=0)}{g_z} \iff z(t=T) = \frac{4.5 \times \sigma_{xy}(t=0) - \sigma_{xy}(t=0)}{\frac{\sigma_{xy}(t=0)}{330 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}}}$$

$$\iff z(t=T) = 1.16 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$$

Gesucht: Gesamtdistanz. Es findet sich

$$\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = 7.75 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$$

Aufgabe 23 – Fluktuation im Potential

Allgemein Optische Fallen und oft bei Mikroskopie: b_i ist Position des Partikels, $S_i(b(t))$ ist die gemessene Trajektorie. Für Autokorrelation im harmonischen Potential gilt

$$\mathrm{AC}(\tau) = \mathrm{AC}[\mathrm{S_i(t)}] = \langle(\mathrm{S_i(t)})^2\rangle \exp\left(-\frac{\tau_\mathrm{i}}{\tau_\mathrm{0i}}\right)$$

mit der Autokorrelationszeit Gleichung (35)

$$\tau_0 = \frac{\gamma}{\kappa}$$

Es wird ein Gaussförmiges Signal-Histogramm erstellt

$$p(S_i) \sim \exp\left(-\frac{S_i^2}{\sigma_i'^2}\right)$$

Die Breite des Histogramms ist σ'. Nun gibt es zwei Verwandte Gleichungen die mit der Detektorsensivität g_i zusammenhängen. Für die Position des Signales S_i gilt

$$S_i = g_i \cdot b_i \tag{49}$$

und für die breite des Histogramms, zusammen mit der Standardabweichung σ_i des Partikels aus dem Potential der Falle

$$\sigma_i' = g_i \cdot \sigma_i \tag{50}$$

Außerdem gilt im harmonischen Potential, weil es nur einen Freiheitsgrad hat, der Gleichverteilungssatz, Gleichung (30)

$$\frac{1}{2}k_\mathrm{B}T = \frac{1}{2}\kappa\sigma^2$$

Mit den Formeln die Aufgabe.

a) Standardabweichung und Detektorsensivität

Gesucht: σ und g.
Gegeben: Radius des Partikels $r = 268 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}$, Breite des Histogramms $\sigma_1' = 70 \times 10^{-3}\,\mathrm{V}$, Autokorrelationszeit $\tau_0 = 23 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$, $T = 300\,\mathrm{K}$, $\eta = 0.85 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$.
Für die Steifigkeit der Falle $\kappa_F = \frac{6\pi\eta r}{\tau_0} = 1.87 \times 10^{-7}\,\mathrm{N\,m^{-1}}$.
Daraus die Standardabweichung über den Gleichverteilungssatz $\sigma_1 = \sqrt{\frac{k_\mathrm{B}T}{\kappa_F}} = 1.49 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$.
Daraus die Detektorsensivität $g = \frac{\sigma'}{\sigma} = 4.7 \times 10^5\,\mathrm{V\,m^{-1}}$.

b) Partikel über elastisches Molekül an steife Membran

Gesucht: Auslenkung aus Ruhelage Δb und steifigkeit Molekül κ_M.
Gegeben: Verschiebung aus Ruhelage $\Delta S = 3.6 \times 10^{-3}\,\mathrm{V}$ und Breite des nun veränderten Histogramms $\sigma_2' = 22.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{V}$.
Für die Auslenkung $\Delta b = \frac{\Delta S}{g} = 7.67 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}$.

Hier ist nach einer Parallelschaltung von Kelvin-Elementen gefragt. Dabei gilt

$$\Delta x_{tot} = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots \tag{51}$$

$$F_{tot}(t) = \dot{x}(t) \sum \gamma_i + x(t) \sum \kappa_i \tag{52}$$

Also für die Addition der Steifigkeiten

$$\kappa_{tot} = \sum \kappa_i \tag{53}$$

Da nun neues Histogramm $\sigma_2 = \frac{\sigma_2'}{g} = 4.79 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}$, da $\kappa_{tot} = \kappa_M + \kappa_F$, wieder über den Gleichverteilungssatz $\kappa_M = \frac{k_B T}{\sigma_2^2} - \kappa_F = 1.62 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,m^{-1}}$.

Aufgabe 24 – AFM Einzelmolekülmessung

Gegeben: Federsteifigkeit Cantilever $\kappa_{\mathrm{AFM}} = 3 \times 10^{-3}\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, Abreißkraft $F_U(b) = 23 \times 10^{-12}\,\mathrm{N}$.

a) Skizze

b) und c) Auslenkung und Energie

Gesucht: Auslenkung b und Energie $W_U(b)$.
Mit Gleichung (9) und (31) ergibt sich $b = \frac{F_U(b)}{\kappa_{\mathrm{AFM}}} = 7.7 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}$ und $W_U(b) = \frac{1}{2}\kappa_{\mathrm{AFM}} \cdot b^2 = 8.8 \times 10^{-20}\,\mathrm{J}$ und das sind $22\,k_B T$

Aufgabe 25 – AFM Scanning

Gegeben: $\kappa = 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, $F(x,y) = 100 \times 10^{-12}\,\mathrm{N}$, Muster der Oberfläche und Bewegung des scheiß Dings $b_z(x,y) = a \cdot \left(1 + \sin\left(x\frac{2\pi}{P}\right)\right)$ mit $a = 87 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}$ und $P = 390 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}$.

a) Konstante Auslenkung und Höhenfunktion

Für Auslenkung $b_z = \frac{F(x,y)}{\kappa} = 2 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}$.
Über Gleichung für die Kraft rückgekoppelter gesteuerter Auslenkung

$$F_z(x,y) = \kappa[b_z(x,y) - h(x,y)] = \text{const.} \tag{54}$$

kann ein Höhenrelief $h(x,y) = a\left(1 + \sin\left(x\frac{2\pi}{P}\right)\right) - 2 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}$ gefunden werden.

b) Kraftverteilung ohne Feedback

Gegeben: $F_{\max} = 1 \times 10^{-9}\,\mathrm{N}$.
Daraus $x_{\max} = \frac{F_{\max}}{\kappa} = 200 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}$. Der Abstand zwischen Höhe und Senke des Reliefs ist $d = 2 \times a = 174 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}$ also ist $x_{\min} = x_{\max} - d$ und $F_{\max} = x_{\min} \cdot \kappa = 130 \times 10^{-12}\,\mathrm{N}$.
Wenn ich recht verstanden habe kann man nun eine Kraftverteilung von $F(x,y) = a \cdot \left(1 + \sin\left(x\frac{2\pi}{P}\right)\right) + b$ herleiten. Dabei ist $a = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{2} = 435 \times 10^{-12}\,\mathrm{N}$ und $b = F_{\min}$.

Aufgabe V1 – Taylorentwicklung

Allgemeine Gleichung für Taylorentwicklung:

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$T_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{55}$$

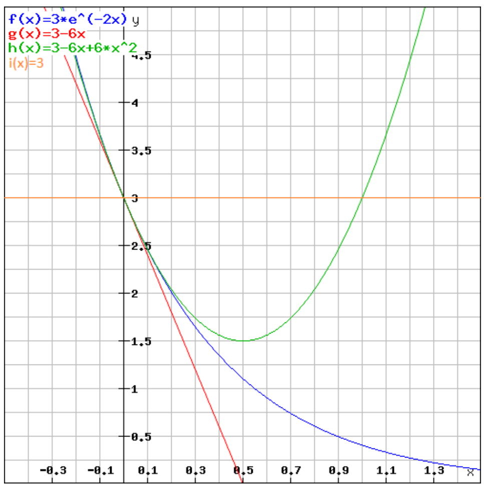
a) Taylorentwicklung 3.Ordnung

Gesucht: Taylorentwicklung von $f(x) = A\exp(-kx)$, bis zur 3. Ordnung, bei $x = 0$. Skizze von $f(x)$, $T_0(x)$, $T_1(x)$ und $T_2(x)$, hierbei $A = 3$ und $k = 2$. Für die Entwicklung gemäß der Formel benötigt man die jeweiligen Ableitungen.

$$\begin{aligned}
f(x) &= A\exp(-kx) & f(0) &= A \\
f'(x) &= -k\,A\,\exp(-kx) & f'(0) &= -k\,A \\
f''(x) &= k^2\,A\,\exp(-kx) & f''(0) &= k^2\,A \\
f'''(x) &= -k^3\,A\,\exp(-kx) & f'''(0) &= -k^3 A
\end{aligned}$$

Nach einsetzen in die Formel findet man folgende Ergebnisse. Und kann die Skizze anfertigen.

$$\begin{aligned}
T_0(x, a=0) &= A \\
T_1(x, a=0) &= A(1-kx) \\
T_2(x, a=0) &= A\left(1 - kx + \frac{k^2}{2}x^2\right) \\
T_3(x, a=0) &= A\left(1 - kx + \frac{k^2}{2}x^2 - \frac{k^3}{6}x^3\right)
\end{aligned}$$



b) Linearisierung

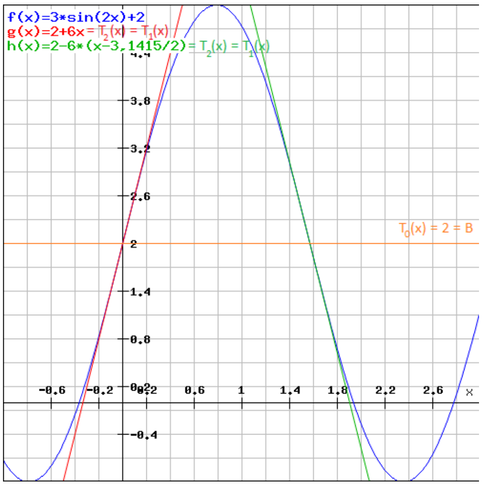
Gesucht: Taylorentwicklung von $f(x) = A\sin(kx) + B$, bis zur ersten Ordnung bei $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$. Skizze von $f(x)$, $T_0(x)$, $T_1(x)$ und $T_2(x)$, hierbei $A = 3$ und $k = 2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= A\sin(kx) + B \\ f'(x) &= k\,A\,\cos(kx) \\ f''(x) &= -k^2\,A\,\sin(kx) \end{aligned}$$

Man erhält die Linearisierung:

$$\begin{aligned} T_1(x=0) &= B + 6x \\ T_1(x=\frac{\pi}{2}) &= B - 6\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

In rot und grün die beiden Linearisierungen.



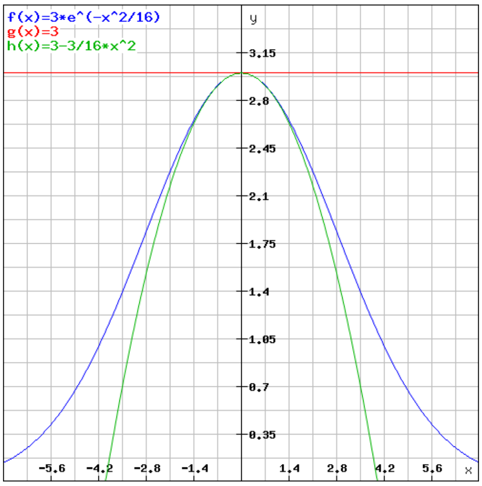
c) 2. Ordnung

Gesucht: Taylorentwicklung von $f(x) = A\exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right)$, bis zur zweiten Ordnung bei $x = 0$. Skizze von $f(x)$, $T_0(x)$, $T_1(x)$ und $T_2(x)$, hierbei $A = 3$ und $\sigma = 4$.

$$\begin{aligned} f(x) &= A\exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \\ f'(x) &= -2A\,\frac{x}{\sigma^2}\,\exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \\ f''(x) &= 2\,\frac{A}{\sigma^2}\left(\frac{2}{\sigma^2}\,x^2 - 1\right)\exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

Dies führt zu:

$$\begin{aligned} T_1 &= 3 \\ T_2 &= 3 - \frac{3}{16}x^2 \end{aligned}$$



Aufgabe V2 – Integration

a) Integration

Gesucht: Integration von $f(x) = A\sin(-kx)$

$$\int_{\pi}^{x=0} f(x)dx = A\int_{\pi}^{x=0} A\sin(-kx) = A\left[-\frac{1}{k}\cos(-kx)\right]_0^{\pi} = -\frac{A}{k}(\cos(-k\pi)-1)$$

b) Integration

Gesucht: Integration von $f(x) = A\exp\left(-\frac{x}{d}\right)$

$$\int_{x=0}^{\infty} f(x)dx = -Ad\left[\exp\left(-\frac{x}{d}\right)\right]_0^{\infty} = -Ad(0-1) = Ad$$

$$\int_{x=0}^{d} f(x)dx = -Ad\left[\exp\left(-\frac{x}{d}\right)\right]_0^{d} = -Ad(\exp(-1)-1) = Ad\frac{(e-1)}{e}$$

Aufgabe V3 – Differentialgleichung

Differentialgleichung $\dot{N}(t) = -kN(t)$

a) Lösen der Differentialgleichung

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = -kdt \iff [\ln N(t)]_0^t = -k[t]_0^t \iff \ln N(t) - \ln N(0) = -kt$$
$$\iff \ln\frac{N(t)}{N(0)} = -kt \iff N(t) = N(0)\exp(-kt)$$

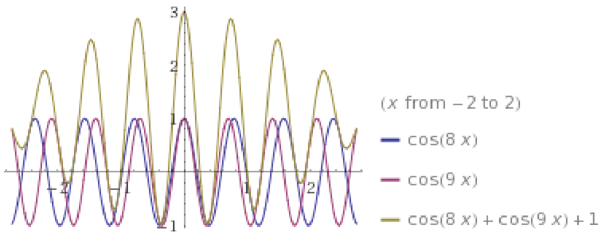
b) Einsetzen von Werten

Gesucht: Anzahl Moleküle $N(t_1)$ nach der Zeit $t_1 = 30\,\mathrm{s}$. *Gegeben*: Anzahl Moleküle $N(t_0) = 1 \times 10^7$ bei $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ mit der Änderungsrate $k = 10\,\mathrm{Hz}$.

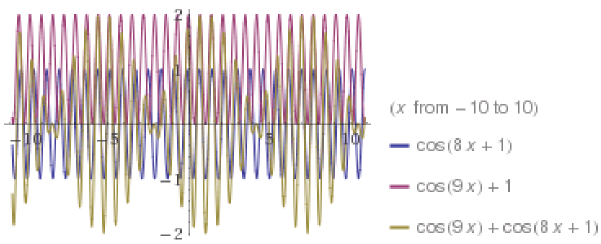
$$N(t-1) = N(t_0)\exp(-kt) = 5.2 \times 10^{-124} \equiv 0$$

Aufgabe V4 – Überlagerung Harmonische Wellen

a) Nur die Schaubilder



b) Nur die Schaubilder



c) Nur die Schaubilder